

文登教育

Wendeng Education



2015

文登教育集团课堂用书

（理工类）

考研数学核心题型

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 主编

- 本书涵盖必考**203个题型**，精心研读是**顺利通关**的保障。
- 本书可**在线答疑**并提供**增值服务**，请扫微信二维码。

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

责任编辑：王玲玲

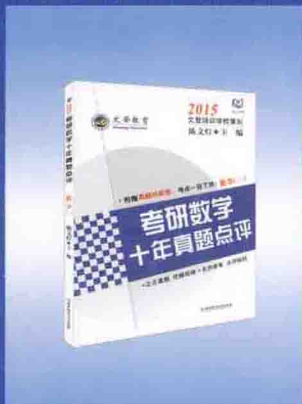
封面设计：尚書坊 图文设计

名师介绍

陈文灯 中央财经大学教授，北京文登学校校长。原中央财经大学数学系主任，北京数学学会理事。在教学和科研上成果卓著，2000年获得“特殊贡献奖”，享受国务院特殊津贴，在考研学子和同仁中有口皆碑。



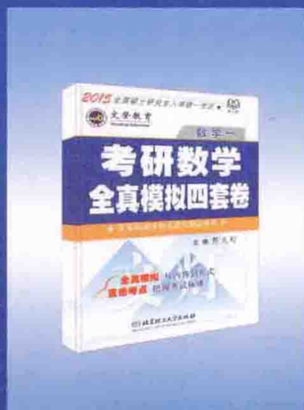
总结最独到讲解最系统



十年点评，总结规律；
考点线路，按图索骥；
分值比重，题型清晰；
思路分析，详解精细；
技巧评注，总结对比；
把握命题，考场无敌！

模拟阶段制胜宝典

冲刺加速，一鼓作气；
检验复习，全真模拟；
知识考点，补漏牢记；
身心状态，更要注意；
认真对待，非凡意义；
相信自己，再创佳绩！







扫一扫 享陈文灯考研图书增值服务

理工社网址：http://www.bitpress.com.cn
答疑论坛：http://bbs.wendengonline.com

ISBN 978-7-5640-9136-1



定价：45.00元



文登教育

Wendeng Education

2015

文登教育集团课堂用书

（理工类）

考研数学核心题型

网络增值版

陈文灯 主编

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学核心题型．理工类／陈文灯主编．—北京：北京理工大学出版社，2014．6
ISBN 978－7－5640－9136－1

Ⅰ．①考…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－解题　Ⅳ．①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 081013 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)
82562903(教材售后服务热线)
68948351(其他图书服务热线)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京文良精锐印刷有限责任公司
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／29.5
字　　数／755 千字
版　　次／2014 年 6 月第 1 版　2014 年 6 月第 1 次印刷
定　　价／45.00 元

责任编辑／王玲玲
文案编辑／王玲玲
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

前　言

考研的几门课中，数学是考生公认的最难复习、最难考的一门课。为此，不少学生不得不放弃钟爱的专业，报考不考数学的专业；多数人硬着头皮抱着试试看的态度参加复习考试。数学果真那么可怕，那么难吗？对于原来数学基础不好，又想考高分(135 分以上)的考生来说，只要具备两个条件：① 比较强的记忆力；② 比较强的模仿能力，即可圆“高分梦”。

记忆的作用在于记住重要的概念、理论与定理公式，以及记住计算方法与技巧。没有记住的东西就无模仿可言，可见记忆之重要。一般人都知道学英语需要记忆，单词需要背诵，其实学数学也需要记忆，要在理解的基础上背重要的定理、公式和概念，背核心的题型。

模仿是指对解题方法和技巧的一种描摹或仿效。数学题千千万，如果都用东施效颦的方法，姑且不说做不到，也不会有什么效果。要模仿就应该抓住常考题型进行相似或变异题的训练。无论是以题型为纲进行的数学实践(考研辅导班)，还是出版书籍的反馈信息，都证明：抓题型就是抓解题方法和技巧的根本和关键。就是基于这样的考虑，我们才编写了这样一套与《考研数学复习指南》相配套的、复习起来省时、省力的考研数学核心题型教材。希望书中的方法和技巧能够在较短的时间里大大提高学生的复习效率，化难为简，从容过关。

本书的特点如下：

① 严格按照《考研数学大纲》的要求，对国内外文献资料，尤其是对 20 多年来考研试题进行了归纳总结，精选出 203 个题型。

② 对每个题型进行详尽分析，指出其特点和易混、易错的地方。

③ 书中有许多题型的解题方法和技巧是我们苦心孤诣、冥思苦想出来的，绝非市面上其他书籍所共有。

④ 有些题解后有评注，虽然寥寥数语，却可起到画龙点睛、开拓思

路的作用。

⑤ 本书编写属上课讲义的形式，可能更贴近考生。

本书适合于参加研究生入学考试的同学在复习时自学研读，也可作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读，并从中领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

书中若有不当之处，敬请读者批评指正。

陈文灯

2014 年 4 月

目　录

第1篇　高等数学题型

第 2 篇　线性代数题型

第 3 篇* 概率论与数理统计题型

注:标有“*”的章节内容数学二不要求。

第 1 篇　高等数学题型

第 1 章　极限和连续

● 重要定理、公式和结论

1.1　重要定理

定理 1　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=A$.

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为 $x\to 0$ 时的无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

定理 3(极限的保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 4　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$f(x)>0$(或 $f(x)<0$)，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

定理 5(单调有界定理)　单调增加有上界(或单调减少有下界)数列一定有极限.

定理 6*(夹逼定理)　设在 x_0 的邻域内恒有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$，且

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A,\qquad \text{则}\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

定理 7(无穷大和无穷小的关系)　无穷大的倒数为无穷小；非零的无穷小的倒数为无穷大.

定理 8(无穷小的运算性质)

(1) 有限个无穷小的代数和为无穷小；

(2) 有限个无穷小的乘积为无穷小；

(3) 无穷小乘以有界变量为无穷小.

定理 9　设有函数 $f(x)$，$g(x)$，如果在自变量的同一变化过程中，有 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

上式第二个式子中的两个极限若有一个不存在，则代数和的极限必不存在；若两个极限都不存在，则代数和的极限不一定存在.

加法运算可推广到有限个中去.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$；

(4) $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)=cA$,其中 c 为常数.

定理 10 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则$|f(x)|$在$[a,b]$上连续.

定理 11 初等函数在其定义域内的区间内连续(因为初等函数中可能有孤立点,所以是在区间内连续).

推论:设 $f(x)$在 x_0 处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=f(x_0)$;若没有说明 $f(x)$在 x_0 处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$,即极限符号和函数符号不能交换顺序.

定理 12 设数列$\{x_n\}$收敛于 l,那么它的任一子序列$\{x_{n_k}\}$也收敛,且极限也是 $l(n_k\to\infty)$;反之不真.

定理 13(洛必达法则)

法则Ⅰ$\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$ 设函数 $f(x),g(x)$满足条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=0$;

(2) $f(x),g(x)$在 x_0 的某邻域内可导,在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导),且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$),

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

法则Ⅱ$\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 设函数 $f(x),g(x)$满足条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\infty$;

(2) $f(x),g(x)$在 x_0 的邻域内可导,在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导),且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$),

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

使用法则时需注意的事项:

(1) 只有$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式才能使用法则;

(2) 每用完一次法则,要将式子整理化简;

(3) 为简化运算,经常将法则与等价无穷小结合使用;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在(或$\infty$)不能$\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)}$不存在;

(5) 当 $x\to\infty$时,极限式中含有 $\sin x,\cos x$(或 $x\to 0$ 时,极限式中含有 $\sin\frac{1}{x},\cos\frac{1}{x}$),则不能用洛必达法则.

1.2　重要公式

公式 1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

若极限式具有如下两个特点：

(1) 是$\dfrac{0}{0}$型极限，这是首要特点，是本质；

(2) $\sin\square$与分数线对面变量$\square$形式一致，则 $\lim\dfrac{\sin\square}{\square}=1$.

公式 2　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

特点如下：

(1) 是 1^∞ 型极限；

(2) 括号中 1 后的变量(包括符号)与指数幂互为倒数.

公式 3(抓大头准则)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

即求 $x\to\infty$的极限时，抓住起决定性作用的 x 的最高次幂的项，把其余的项略掉.

公式 4(函数连续的充要条件)

函数在一点 x_0 连续的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$$

公式 5

(1) 当 $x\to+\infty$时，函数趋于$+\infty$的速度由慢到快为 $\ln x, x^\alpha(\alpha>0), a^x(a>1), x^x$.

(2) 当 $n\to\infty$时，通项趋于$+\infty$的速度由慢到快为 $\ln n, n^\alpha(\alpha>0), a^n(a>1), n!, n^n$.

(3) 常用数列极限：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$，特例为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

$\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0(|p|<1)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0(k>0)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

(4) 常用函数极限：

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=\infty$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$；$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$.

注：若 $x\to\infty$的极限式中含有 $a^x(a>0,a\neq1)$，特别是 e^x，或 $\arctan x$，或 $\operatorname{arccot} x$，或$|x|$（或 $x\to0$ 时，极限式中含 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，或 $\arctan\dfrac{1}{x}$，或 $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$，或$|x|$），一定分别求出 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$（或 $x\to0^+$，$x\to0^-$）时的极限，若两者相等，则 $x\to\infty$（或 $x\to0$）时的极限存在，否则不存在.

●核心题型及思路启迪

1.3 函数的极限

题型1 无穷小的比较或确定无穷小的阶

思路启迪:(1) 对无穷小的比较,分两种情形.

情形1:两个无穷小的比较,一般利用定义,常用洛必达法则和等价无穷小代换.

情形2:三个或三个以上无穷小的比较,一般先利用等价无穷小代换化简,然后进行无穷小的比较,常用洛必达法则;若用洛必达法则时较复杂,特别是被比较的函数含变限积分,则可先求导,然后对导函数作等价无穷小代换,最后再比较.

(2) 确定无穷小的阶,一般利用$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}$为有限数来确定$n$.确定$n$时,常用洛必达法则和等价无穷小代换两种方法.

例1 设$f(x)$,$g(x)$为连续函数,且$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$.令$F(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$,$G(x)=\int_0^x tg(x-t)\mathrm{d}t$,则当$x\to0$时,$F(x)$是$G(x)$的( ).

(A) 高阶无穷小量 (B) 低阶无穷小量

(C) 等价无穷小量 (D) 同阶而非等价无穷小量

分析:遇到被积函数是给定函数与某一简单函数复合而成的函数时,要通过变量代换将其化为给定函数的形式,如本题中$G(x)=\int_0^x tg(x-t)\mathrm{d}t$,应令$u=x-t$,将$g(x-t)$化为$g(u)$的形式.

解:$G(x)=\int_0^x tg(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令}u=x-t}\int_x^0(x-u)g(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x g(u)\mathrm{d}u-\int_0^x ug(u)\mathrm{d}u$.

于是

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x g(u)\mathrm{d}u-\int_0^x ug(u)\mathrm{d}u}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)\cdot2x}{\int_0^x g(u)\mathrm{d}u+xg(x)-xg(x)}\quad\text{(洛必达法则)}$$

$$=2\lim_{x\to0}f(x^2)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\int_0^x g(u)\mathrm{d}u}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)} = 2 \quad 故选(D)$$

例 2　把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 进行排列，使后者是前者的高阶无穷小，正确的排列次序为(　　).

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

分析：用定义做时，一般用洛必达法则，即对分子、分母求导，所以也可以先求导，然后再比较.

解：

$$\alpha' = \cos x^2 \to 1(x\to 0^+),\qquad \beta' = 2x\tan x \sim 2x^2(x\to 0^+)$$

$$\gamma' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}} \sim \frac{1}{2}x(x\to 0^+)$$

由于当 $x\to 0^+$ 时，x 的次数越高，根据题意，排列越靠后；又根据洛必达法则，函数的排列次序和导函数的排列次序是相同的，故(B)为正确选项.

例 3　设 $f(x)=2x-\sin x-\sin x\cos x$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的(　　)阶无穷小.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}(n\text{ 待定})=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x-\sin x\cos x}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\cos x-\cos 2x}{nx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+2\sin 2x}{n(n-1)x^{n-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+4\cos 2x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$$

最后一个极限式中，当 $x\to 0$ 时，分子的极限为 5，若此极限存在，则必须 $n=3$.

注：三角函数一般通过积化和差或倍角公式进行降阶.

题型 2　求未定式函数极限

1. 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式函数极限

若 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\frac{0}{0}$ 型未定式函数极限.

思路启迪：(1) 通过因式分解或根式有理化，消去使分母为零的因式，再用极限运算法则或连续函数的性质求解.

所谓根式有理化，是指极限式中含有 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$（或 $a\pm\sqrt{b}$），在求极限之前，先用它们的共轭根式 $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$（或 $a\mp\sqrt{b}$）分别乘以分子、分母，使其“0”因子呈现出来的一种运算.

(2) 利用等价无穷小代换.

(3) 利用洛必达法则求极限（这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法，但是要注意使用条件）.

(4) 若前三种方法无法求得极限，可考虑用变量代换（通常是作倒代换，令 $x=\frac{1}{t}$ 或 $x=\frac{1}{t^2}$）.

(5) 利用泰勒公式求极限.

例 4 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin\sqrt[3]{x-1}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(3\sin t+t^2\cos\frac{1}{t}\right)dt}{(1+\cos x)\int_0^x\ln(1+t)dt}$.

解: (1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$ (根式有理化)

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}\quad(\text{等价无穷小代换 }1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{[x\ln(1+x)-x^2](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\quad(\text{根式有理化})$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{1}{1+x}-1}\quad(\text{洛必达法则})$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot(1+x)=-\frac{1}{2}$$

(3) 因为当 $x\to1$ 时, $\sqrt[3]{x-1}\to0$, 所以 $\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$, $\arcsin\sqrt[3]{x-1}\sim\sqrt[3]{x-1}$,故

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin\sqrt[3]{x-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}=1$$

(4) 原极限 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(3\sin t+t^2\cos\frac{1}{t}\right)dt}{\int_0^x\ln(1+t)dt}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{3\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}(3+0)=\frac{3}{2}$$

注: 等价无穷小代换可简化求极限的过程,但是用得不得法会出大错. 一般讲,乘除运算时尽管用;加减运算时不宜用,此时常改用泰勒公式.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

解：首先用洛必达法则计算.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}}{100x^{99}}=\frac{1}{50}\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}$$

极限形式比原先的还要复杂，可见用洛必达法则行不通.

遇到 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 这种形式，一般作倒代换. 本题中令 $t=\frac{1}{x^2}$，当 $x\to0$ 时，$t\to+\infty$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0\quad（连续用洛必达法则）$$

例 6 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$.

分析：当 $\frac{0}{0}$ 型未定式呈现 $\frac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}$ 或 $\frac{x^k}{f_2(x)-g_2(x)}$ 或 $\frac{f_1(x)-g_1(x)}{x^k}$ 的形式，且用洛必达法则求解较复杂或不可用时，则考虑用泰勒公式求解. 一般用泰勒公式展开到相互抵消后的一项.

解：(1) $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2+o(x^2)$， $\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2+o(x^2)$

$$故原极限=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

(2) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$， $\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2+o(x^2)$

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4!}x^2+o(x^2)$$

$$故原极限=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4!}x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{8}-\frac{1}{4!}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=-3.$$

注：七个常见的泰勒展开式如下（必须熟记）：

(1) $e^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\cdots+\frac{1}{n!}u^n+o(u^n)$；

(2) $\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(u^{2n+2})$；

(3) $\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+o(u^{2n+1})$；

(4) $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}+o(u^n)$；

(5) $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)$；

(6) $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots+(-1)^nu^n+o(u^n)$；

(7) $(1+u)^\alpha=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+o(u^n)$.

2. 求$\frac{\infty}{\infty}$型函数极限

若 $\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$称为$\frac{\infty}{\infty}$型未定式函数极限.

思路启迪：(1) 用抓大头准则，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

即求 $x\to\infty$ 的极限时，抓住起决定性作用的 x 的最高次幂的项，而把其余的项略掉.

(2) 利用洛必达法则.

(3) 利用变量代换化为$\frac{0}{0}$型.

例 7 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x-1)(2x+1)}{5x^3+2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^2+3}}{2x-\sqrt{2x^4-1}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+e^{-x}}{3e^x+2e^{2x}}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x-1)(2x+1)}{5x^3+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2}{5x^3}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^2+3}}{2x-\sqrt{2x^4-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}}}{\frac{2}{x}-\sqrt{2-\frac{1}{x^4}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 原极限$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+2x^2}=\frac{1}{2}$.

(4) 若一直用洛必达法则，则越来越复杂，得不出结果.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+e^{-x}}{3e^x+2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}-e^{-x}}{3e^x+4e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}+e^{-x}}{3e^x+8e^{2x}}=\cdots$$

经观察，当 $x\to+\infty$时，分子、分母中的大头为 e^{2x}，故分子、分母同除以 e^{2x}，可得

$$原极限=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-3x}}{3e^{-x}+2}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-3x})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3e^{-x}+2)}=\frac{1}{2}$$

3. 求∞-∞型函数极限

思路启迪：(1) 通分或根式有理化将其化成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型；

(2) 利用倒代换 $x=\frac{1}{t^k}$(常数 $k>0$).

例 8　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-3x-1})$.

解：(1) 遇到 $\tan x$ 或 $\cot x$ 时，一般先将它们化为正、余弦的形式.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\quad\text{（因式分解降幂简化计算）}\\&=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)\quad\text{（洛必达法则）}\\&=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(2) $$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-3x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x+x}=3\quad\text{（抓大头准则）}$$

例 9　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.

解：(1) 遇到题中含 $\frac{1}{x}$ 时，要想到倒代换. 令 $\frac{1}{x}=t$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]&=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right]\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t}\cdot\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x}\right)\xlongequal{\text{令 }t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)-2t}{t^3}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}-2}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2}{3t^2(1-t^2)}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

4. 求 0 · ∞型未定式函数极限

思路启迪：一般通过将“0”或“∞”项下放（放到分母的位置上）转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后再用洛必达法则或抓大头准则.

设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=\infty$，则

$$\lim f(x)g(x)=\lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

一般来讲，简单函数下放，复杂函数不下放！特别是对数函数和反三角函数 $\arcsin x$，$\arctan x$ 等不下放.

例 10 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan 4x^2\right)\cdot x^2$.

解：
$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan 4x^2}{x^{-2}}\left(\frac{0}{0}\right)\ （洛必达法则）$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{8x}{1+(4x^2)^2}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4}{1+16x^4}=\frac{1}{4}\ （抓大头准则）$$

例 11 求$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

分析：本题中含根式，先对根式进行有理化处理.

解：
$$I=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}[(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1}\right)\left(\sqrt{1}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}=-\frac{1}{4}$$

5. 求 0^0，∞^0，1^∞ 型函数极限

思路启迪：利用对数恒等式 $x=\mathrm{e}^{\ln x}$ 化为 $0\cdot\infty$型. 对于 $1^\infty=\mathrm{e}^A$ 型极限，一般有如下两种情形：

（Ⅰ）设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=\infty$，则有
$$I=\lim[1\pm f(x)]^{g(x)}\ (1^\infty)$$
$$=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln[1\pm f(x)]}=\mathrm{e}^{\pm\lim f(x)g(x)}\quad(\ln[1\pm f(x)]\sim\pm f(x))$$
结论：A=括号中 1 后的函数与指数幂乘积的极限.

（Ⅱ）设 $\lim f(x)=1$，$\lim g(x)=\infty$，则有
$$I=\lim f(x)^{g(x)}\ (1^\infty)$$
$$=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln[1+(f(x)-1)]}=\mathrm{e}^{\lim[f(x)-1]g(x)}$$
结论：$A=\lim[f(x)-1]g(x)$.

例 12 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{\frac{1}{\tan x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解：这类题结合等价无穷小代换可事半功倍.

(1) 属于(Ⅰ). $A=\lim\limits_{x\to 0}(-\sin 3x)\dfrac{1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}(-3x)\dfrac{1}{x}=-3$，故 $I=\mathrm{e}^{-3}$.

(2) 属于(Ⅱ). $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，故 $I=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

注：此种题型常出现在填空题中，不考查解题步骤，利用题中技巧可快速、准确地得到答案.

例 13　计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x$ $(a_1>0,a_2>0)$.

解：(1) 属于(Ⅱ). $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}-1\right)\cdot\dfrac{x+1}{3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6}{3x+2}\cdot\dfrac{x+1}{3}=-\dfrac{2}{3}$，故 $I=e^{-\frac{2}{3}}$.

(2) 题中含有两个参数 a_1,a_2，需讨论.

当 $a_1<a_2$ 时，$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^x=0$；当 $a_1>a_2$ 时，$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^x=+\infty$；当 $a_1=a_2$ 时，极限属于 1^∞ 型.

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}-1\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a_1-a_2)x+b_1-b_2}{a_2x+b_2}\cdot x=\frac{b_1-b_2}{a_2}$$

故 $I=e^{\frac{b_1-b_2}{a_2}}$.

例 14　设 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足$\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求$f(x)$.

解：显然$\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$为 $1^\infty=e^A$ 型极限，所以有

$$A=\frac{1}{x}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}-1\right]\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{hx}\cdot\frac{x}{f(x)}=\frac{x}{f(x)}f'(x)$$

于是得$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x^2}$，两边积分得 $\ln f(x)=-\dfrac{1}{x}+\ln C$，即 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}$，两边取 $x\to+\infty$时的极限可得 $C=1$，故 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

例 15　设 $f''(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$及$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

分析：$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=e^3\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

解：由题设 $3=A=\lim\limits_{x\to0}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2}$. 于是可得

$$\lim_{x\to0}[x^2+f(x)]=0\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)=0\Rightarrow f(0)=0$$

又由洛必达法则可得

$$3=\lim_{x\to0}\frac{2x+f'(x)}{2x}\Rightarrow\lim_{x\to0}[2x+f'(x)]=0\Rightarrow\lim_{x\to0}f'(x)=0\Rightarrow f'(0)=0$$

继续用洛必达法则可得

$$3=\lim_{x\to0}\frac{2+f''(x)}{2}\Rightarrow\lim_{x\to0}[2+f''(x)]=6\Rightarrow\lim_{x\to0}f''(x)=4\Rightarrow f''(0)=4$$

易知$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$为 1^∞ 型，所以

$$A=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)}{x}\right]\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=2$$

故$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^2$.

例 16　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}[\ln(1+x^2)]^{e^{x^2}-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

解：(1) 此题属于 0^0 型未定式，利用对数恒等式转换.

$$I=e^{-\lim\limits_{x\to0}(e^{x^2}-1)\ln[\ln(1+x^2)]}=e^{\lim\limits_{x\to0}x^2\ln x^2}\quad(e^{x^2}-1\sim x^2,\ln(1+x^2)\sim x^2)$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x^2}{x^{-2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2}(2x)}{-2x^{-3}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}x^2}=e^0=1$$

(2) 此题属于 ∞^0 型未定式，利用对数恒等式转换.

$$I=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1$$

6. 求 0·有界量类型函数极限

思路启迪：利用无穷小与有界量的乘积仍为无穷小的结论.

例 17 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{2}{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$.

解：(1) 当 $x\to0$ 时，x 是无穷小量，$\left|\sin\dfrac{2}{x}\right|\leqslant1$，故 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{2}{x}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$，且 $|\cos x|\leqslant1$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}=0$.

题型 3 求分段函数在分界点的极限

思路启迪：当分界点两侧的函数表达式相同时，利用定义；当分界点两侧的函数表达式不相同时，要分别求函数在该点处的左、右极限. 若左、右极限相等，则极限存在，否则不存在，即若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧表达式不同，为 $f(x)=\begin{cases}f_1(x),x>x_0\\f(x_0),x=x_0\\f_2(x),x<x_0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f_1(x)$ 时，极限存在，否则不存在.

例 18 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+1}-1}\quad(a>0),\quad -1<x<0\\[2ex]\dfrac{(m-1)x-m}{x^2-x-1}\quad(m\neq0),\quad 0\leqslant x\leqslant1\end{cases}$$

试问 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

解：

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(m-1)x-m}{x^2-x-1}=m$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{(\sqrt{x^2+a^2}-a)(\sqrt{x^2+a^2}+a)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+a^2}+a)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+a^2}+a)}=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}$$

故当 $f_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，即 $a=\frac{1}{m}$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

题型4 极限式中常数的确定

思路启迪：没有固定模式，需观察极限式，结合各类极限的求法和极限的运算法则进行计算. 如果是分式极限，则有以下结论：

(1) 若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=k$（k 为常数），且 $\lim g(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$.

(2) 若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq0$（$k$ 为常数），且 $\lim f(x)=0(\infty)$，则 $\lim g(x)=0(\infty)$.

例 19 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$，求常数 a,b.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(b-a)x+1+b}{x+1}=3$，由抓大头准则可得 $1-a=0$，$b-a=3$，故 $a=1,b=4$.

例 20 已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=c$，且 $c\neq0$，求常数 a,b，使得当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim ax^b$.

解：由极限式可得，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}f(x)=0$，故当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}f(x)$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}f(x)}{x^2}=c$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^3}=c$，当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim2cx^3$，故 $a=2c,b=3$.

例 21 设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-8x^8}{2x^2+3x+1}=4$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=8$，求 $f(x)$.

解：由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-8x^8}{2x^2+3x+1}=4$ 及抓大头准则，可设 $f(x)=8x^8+8x^2+ax+b$，又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=8$，则

$$\lim_{x\to0}f(x)=0\Rightarrow b=0,\qquad \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{8x^8+8x^2+ax}{x}=8\Rightarrow a=8$$

故 $f(x)=8x^8+8x^2+8x$.

例 22 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有一阶连续导数，且 $f(0)\neq0$，$f'(0)\neq0$，若

$$\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$$

试确定 a,b 的值.

解：由已知，有 $\lim\limits_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$，而 $\lim\limits_{h\to0}h=0$，得

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=0, \quad 即\ af(0)+bf(0)-f(0)=0$$

由于 $f(0)\neq 0$,于是

$$a+b-1=0 \tag{1}$$

又由洛必达法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}$$
$$=af'(0)+2bf'(0)=0$$

由于 $f'(0)\neq 0$,于是

$$a+2b=0 \tag{2}$$

所以,由式(1)、式(2)得 $a=2,b=-1$.

例 23 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$,试确定 a,b,c 的值.

解: 因为 $c\neq 0,\lim\limits_{x\to 0}(ax+\sin x)=0$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$,而当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\sim t^2>0$,所以 $b=0$.

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+\cos x}{x^2}=c(c\neq 0)$,而$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,所以 $a=-1,c=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1+\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$,故 $a=-1,b=0,c=-\dfrac{1}{2}$.

例 24 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$,又$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$,试确定 c 的值.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2c}{x-c}\right)^x=\mathrm{e}^{2c}$,由于 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,根据拉格朗日中值定理可知,存在一个 $\xi\in(x-1,x)$,使

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)$$

当 $x\to\infty$时,$\xi\to\infty$,所以$\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}$,即$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\mathrm{e}$,因此 $\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}\Rightarrow 2c\Rightarrow 1\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$.

例 25 试确定常数 A,B,C 的值,使得 $\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$,其中 $o(x^3)$是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

解: 由已知得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)-Ax-1}{x^3}=0$,由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^x-A)+x(B\mathrm{e}^x+2C\mathrm{e}^x)+Cx^2\mathrm{e}^x}{3x^2} \tag{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x+2B\mathrm{e}^x+2C\mathrm{e}^x)+x(B\mathrm{e}^x+4C\mathrm{e}^x)+Cx^2\mathrm{e}^x}{6x}=0 \tag{2}$$

由式(1)得

$$\lim_{x\to 0}[(\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^x-A)+x(B\mathrm{e}^x+2C\mathrm{e}^x)+Cx^2\mathrm{e}^x]=1+B-A=0 \tag{3}$$

由式(2)得

$$\lim_{x\to 0}[(e^x+2Be^x+2Ce^x)+x(Be^x+4Ce^x)+Cx^2e^x]=1+2B+2C=0 \tag{4}$$

及

$$\lim_{x\to 0}(Be^x+4Ce^x)=B+4C=0 \tag{5}$$

将式(3)、式(4)、式(5)联立,可解得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$.

1.4 数列的极限

题型5 求各种类型(∞/∞型、1^∞型、$\infty-\infty$型)的数列极限

1. 求∞/∞型分式数列的极限

思路启迪: (1) 若是有理分式,一般利用抓大头准则,分子、分母同除以 n 的最高次幂,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_{m-1}n+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & k=m\\ 0, & k<m\\ \infty, & k>m\end{cases}$$

即求 $n\to\infty$ 的极限时,抓住起决定性作用的 n 的最高次幂的项,而把其余的项略掉.

(2) 若分子、分母含根号,直接利用(1)的结论,或观察得出分子、分母中 n 的最高次幂,然后分子、分母同除以它,利用 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0(k>0)$ 计算极限.

(3) 若分子、分母包含以 n 为指数的项,则一般分子、分母同除以底数绝对值最大的那一项(也就是起决定作用的那一项),利用 $\lim_{n\to\infty}p^n=0(|p|<1)$ 来计算极限.

例26 计算下列数列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+10n+8}{(2n+1)(6n^2-1)}$; (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{3^{n+1}-5^{n+1}}$.

解: (1) 分子中最高次幂为 n^3,系数为3,分母中最高次幂也为 n^3,系数为12,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+10n+8}{(2n+1)(6n^2-1)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{3^{n+1}-5^{n+1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]}{5^{n+1}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]}=-\frac{1}{5}$ (因为$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$)

例 27 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-(n-1)^{\beta}}=2\ 006$,求 α,β 的值.

解:由题设可得

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-(n-1)^{\beta}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta}}{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\beta}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta}}{1-\left[1-\dfrac{\beta}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta}$$

于是,当 $\alpha-\beta+1>0$ 时,$I\to\infty$;当 $\alpha-\beta+1=0$ 时,$I\to\dfrac{1}{\beta}$;当 $\alpha-\beta+1<0$ 时,$I\to 0$. 故 $\alpha-\beta+1=0$,$\dfrac{1}{\beta}=2\ 006$,解之可得 $\alpha=-\dfrac{2\ 005}{2\ 006}$,$\beta=\dfrac{1}{2\ 006}$.

2. 求 1^{∞} 型数列极限

思路启迪:一般通过变形为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$ 的形式,然后利用它的结论或令 $n=x$,求出形式相同的函数的极限,即得数列的极限.

例 28 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n+1}\right)^{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\frac{n+1}{3}}\right]^{\frac{n+1}{3}\cdot\frac{3}{n+1}n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}}=\mathrm{e}^{3}$

(2) 令 $n=x$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(x\sin\frac{1}{x}-1\right)\right]^{x^2}$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(x\sin\frac{1}{x}-1\right)\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}\sin u-1}{u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{\sin u-u}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{\left[u-\dfrac{1}{3!}u^3+o(u^3)\right]-u}{u^3}=-\frac{1}{6}$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

3. 求 $\infty-\infty$ 型数列极限

思路启迪:一般利用根式有理化或通分化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

例 29 求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$.

解:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=0$$

题型6 给出数列$\{x_n\}$通项表达式,求极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

思路启迪:方法1 利用极限定义求解(考研一般不考)或单调有界数列必有极限定理(一般用单调上升有上界数列必有极限;单调下降有下界数列必有极限)证明.

数列$\{x_n\}$单调性的证明方法如下:

(1) 数学归纳法或不等式放缩法;

(2) 差值法:$x_n - x_{n-1} \geqslant 0$(或$\leqslant 0$),则$\{x_n\}$单增(或单减);

(3) 比值法:$\dfrac{x_n}{x_{n-1}} \geqslant 1$(或$\leqslant 1$),则$\{x_n\}$单增(或单减);

(4) 写出x_n表达式对应的函数$\varphi(x)$,求出导函数$\varphi'(x)$,若$\varphi'(x) > 0$(或<0),则$\{x_n\}$单增(或单减).

解题程序如下:

(1) 用数学归纳法或差值法、比值法和对应函数法证明$\{x_n\}$单调有界,从而得出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$;

(2) 在x_n表达式的两边求$n\to\infty$时的极限,得出关于l的方程,解出l,即得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

方法2 利用级数收敛的必要条件:若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 此法适用于数列通项$a_n$中含$n!$或$a^n, n^n$的情形.

例30 设$x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}\,(n = 1, 2, \cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解: 由$x_1 = 10, x_2 = \sqrt{6 + x_1} = 4$,可知$x_1 > x_2$. 设$x_k > x_{k+1}$,则$x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} > \sqrt{6 + x_{k+1}} = x_{k+2}$,于是由数学归纳法可知,对一切自然数$n$,有$x_n > x_{n+1}$,即$\{x_n\}$单调减少.

又由题设可知$x_n > 0, n = 1, 2, \cdots$,即$\{x_n\}$有下界,故由$\{x_n\}$单调减少有下界必有极限可知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$,在$x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$两边取$n\to\infty$时的极限,得

$$l = \sqrt{6 + l}, \qquad \text{解之得 } l = 3, \quad l = -2\text{(舍去)}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

例31 设$0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}\,(n = 1, 2, \cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解: $0 < x_1 < 3, x_2 = \sqrt{x_1(3 - x_1)} \leqslant \dfrac{1}{2}[x_1 + (3 - x_1)] = \dfrac{3}{2}$,设当$k > 1$时,$0 < x_k \leqslant \dfrac{3}{2}$,则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3 - x_k)} \leqslant \frac{1}{2}[x_k + (3 - x_k)] = \frac{3}{2}$$

可知$0 < x_n \leqslant \dfrac{3}{2}$,即数列$\{x_n\}$有界.

又当$n > 1$时,有

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n$$
$$=\frac{x_n(3-x_n)-x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}=\frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant 0\quad(\text{因为 } x_n\leqslant\frac{3}{2})$$

所以数列$\{x_n\}$单调增加. 故由单调有界数列定理可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$两边取$n\to\infty$时的极限得

$$l=\sqrt{l(3-l)},\qquad \text{解之得 } l=0(\text{舍去}),\quad l=\frac{3}{2}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

注:本题中$\{x_n\}$的单调性还可用对应函数法证明.

令$\varphi(x)=\sqrt{x(3-x)}$,$0<x\leqslant\frac{3}{2}$,则$\varphi'(x)=\frac{3-2x}{2\sqrt{x(3-x)}}>0$,所以$\varphi(x)$单调增加,于是数列$\{x_n\}$单调增加.

例 32 设$x_1=1$,$x_n=\frac{x_{n-1}+3}{x_{n-1}+1}(n=1,2,\cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解:令$f(x)=\frac{x+3}{x+1}=1+\frac{2}{x+1}(x>0)$,则$f'(x)=-\frac{2}{(x+1)^2}<0$,所以$f(x)$单调减少,可知数列$\{x_n\}$单调减少.

又$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x+1}=1$,可知数列$\{x_n\}$有下界.

综上可知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,于是$l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}+3}{x_{n-1}+1}=\frac{l+3}{l+1}$,即

$$l^2+l=l+3,\qquad \text{解之得 } l=\sqrt{3},l=-\sqrt{3}(\text{舍去})$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

例 33 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$.

解:令$a_n=\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$,作级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{n^n}=\frac{\mathrm{e}}{3}<1$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=0$.

题型 7 数列 n 项和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,当 $n\to\infty$ 时的极限

思路启迪:(1) 利用特殊级数求和法;

(2) 利用夹逼定理;

(3) 利用定积分定义. 可用定积分定义计算的条件:

每项提出$\frac{b-a}{n}$或$\frac{1}{n}$后,n项和可写成$\sum\limits_{i=1}^{n}f\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$或$\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$的形式.

例 34　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{3^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{3^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{3^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解：(1) $\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以

$$I=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{1+1}+2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{5}{2}$$

(2) $$I=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

(3) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant I_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，且当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\to1$，$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to1$，故由夹逼定理得 $I=\lim\limits_{n\to\infty}I_n=1$.

(4) 因为 $\frac{3^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{2}{n}}+\cdots+3^{\frac{n}{n}}}{n+1}\leqslant I_n\leqslant\frac{3^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{2}{n}}+\cdots+3^{\frac{n}{n}}}{n}$，则

$$\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}3^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant I_n\leqslant\sum_{i=1}^{n}3^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}3^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}I_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}3^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{n}3^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 3^x\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1=\frac{2}{\ln 3}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\frac{2}{\ln 3}$.

例 35　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>1)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)$.

解：(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$

(2) 令 $S_n=\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)=2\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2i-1}{4n}\pi\cdot\frac{\pi}{2n}$. S_n 可看作 $f(x)=\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的积分和式，且

$$S_n=2\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,\qquad \xi_i=\frac{2i-1}{4n},\qquad \Delta x_i=\frac{\pi}{2n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

于是

$$I=\lim_{n\to\infty}S_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

例 36 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right]$.

解: 凡每一项提出 $\frac{1}{n}$ 后，n 项和不能写成 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)$，但各项具有单调性，此时可考虑用夹逼定理做.

令 $f(x)=\frac{1}{(n^x+1)^{\frac{1}{x}}}$，$\ln f(x)=-\frac{1}{x}\ln(n^x+1)$，两边对 x 求导得

$$f'(x)=f(x)\left[\frac{\ln(n^x+1)}{x^2}-\frac{n^x\ln n}{x(n^x+1)}\right]>f(x)\left[\frac{\ln n^x}{x^2}-\frac{\ln n}{x}\right]=0$$

所以 $f(x)$ 单调递增，从而有

$$\frac{n}{n+1}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}<\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}=1$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right]=1$$

题型 8 n 个因子乘积，当 $n\to\infty$ 时的极限

思路启迪: (1) 分子、分母同乘以一个因子，使之发生连锁变化；

(2) 将通项分解成两个因子，去掉各个括号，约掉中间因子，只留首尾；

(3) 利用夹逼定理；

(4) 利用对数恒等式 $N=\mathrm{e}^{\ln N}$，化 n 个因子乘积为 n 项和的形式.

例 37 求下列极限：

(1) 当 $|x|<1$ 时，求 $\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})$；

(2) 求 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；

(3) 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$；

(4) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

解：(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})}{1-x}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})}{1-x}$$

$$\vdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+2}}{1-x}=\frac{1}{1-x}\quad（因为当|x|<1时，\lim_{n\to\infty}x^{2n+2}=0）$$

(2) $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$，则

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$

(3) $1\cdot 3<2^2, 3\cdot 5<4^2, 5\cdot 7<6^2, \cdots, (2n-1)(2n+1)<(2n)^2$，则

$$1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\cdots\cdot(2n-1)^2(2n+1)<2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\cdots\cdot(2n)^2$$

两边开方得

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)$$

即

$$0<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0\quad（当 n\to\infty 时）$$

所以极限 $I=0$.

(4) $I=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)}=e^{\int_0^1\ln(1+x^2)dx}=e^{\ln 2-2+\frac{\pi}{2}}$

例 38　求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$；

(2) 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(x)>0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f(1)}$；

(3) 设对区间$[a,b]$ n 等分，每点为 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，$\Delta x=\frac{b-a}{n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.

解：(1) $I=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=e^{2\ln 2-1}$

(2) $I=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right)+\ln f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln f\left(\frac{n}{n}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)}=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}$

(3) $I=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

由题设 $x_i=a+i\Delta x=a+i\frac{b-a}{n}$，于是

$$I=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\cdot\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{b-a}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\cdot\frac{b-a}{n}}$$

$$=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x dx}=e^{\frac{1}{b-a}[b\ln b-a\ln a-(b-a)]}=\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

1.5 函数的连续性

题型 9 函数连续性的讨论

思路启迪：(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧表达式不相同，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的充要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$；

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧为同一表达式，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的充要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；

(3) 若函数中含绝对值符号，一般先去掉绝对值符号，将函数改写成分段函数，再讨论函数在分段点的连续性；

(4) 基本初等函数在其定义域是连续的，而初等函数在其定义区间内是连续的.

例 39 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的连续性.

解：函数中含绝对值号，去掉绝对值号，函数为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad f(0)=1$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，仅右连续.

例 40 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{x}, & x<0\\ (x+k)^2, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 k 的值，使 $f(x)$ 在其定义区间内连续.

解：当 $x<0$ 或 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 是初等函数，是连续的，又

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4=4$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+k)^2=k^2,\qquad f(0)=k^2$$

若函数 $f(x)$ 要在 $x=0$ 处连续，必须满足 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，即 $4=k^2$，故 $k=\pm 2$ 时，函数 $f(x)$ 在其定义区间内连续.

例 41　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x^2}, & x<0\\ A\,, & x=0\\ \dfrac{\sin x+B\int_0^x e^{-t^2}\,dt}{x}, & x>0\end{cases}$ 处处连续，试确定 A,B 的值.

解: 由题设，有 $f_-(0)=f_+(0)=f(0)=A$，而

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2\sin 2x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-4\cos 2x+\cos x}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x+B\int_0^x e^{-t^2}\,dt}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x+Be^{-x^2}}{1}=1+B$$

则 $-\frac{3}{2}=1+B=A$，故 $A=-\frac{3}{2}$，$B=-\frac{5}{2}$.

题型 10　确定函数的间断点及其类型

思路启迪: 确定函数的间断点，可按以下步骤进行:

(1) 找出 $f(x)$ 的定义域，若在 $x=x_0$ 无定义，则 $x=x_0$ 为间断点；若有定义，再检验下一步.

(2) 检查 $x=x_0$ 是否为初等函数定义区间内的点，若是，则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的连续点，否则看 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 x_0 为 $f(x)$ 的间断点；若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则再检查下一步.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则 x_0 为 $f(x)$ 的连续点；若不相等，则 x_0 为间断点.

(4) 最后根据定义，判断间断点的类型.

例 42　求 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+2x-3}$ 的间断点，并判断类型.

解: 首先找出使 $f(x)$ 无定义的点: $x=0$，$x=-3$，$x=1$. 又

$$\lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{\ln(-x)}{x^2+2x-3}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2+2x-3}\xlongequal{\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2+2x-3}=\infty$$

故由以上可知，$x=0$，$x=-3$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点；$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

注: 设 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，那么

(1) 若 $f_-(x_0)$，$f_+(x_0)$ 均存在，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

又若 $f_-(x_0)=f_+(x_0)\neq f(x_0)$，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点；

若 $f_-(x_0)\neq f_+(x_0)$，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) 若 $f_-(x_0)$，$f_+(x_0)$ 有一个不存在，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例 43　设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$(　　).

(A) 有 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

(B) 有 1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C) 有 2 个无穷间断点

(D) 有 2 个跳跃间断点

解： $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$ 在 $x=0$，$x=1$ 无定义，而

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=0$$

所以 $x=0$ 为可去间断点；

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln|1+x-1|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{|x-1|}\sin x$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{|x-1|}\sin x=\sin 1,\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{|x-1|}\sin x=-\sin 1$$

所以 $x=1$ 为跳跃间断点，故选(A).

例 44　函数 $f(x)=\dfrac{(e^x+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

解： 函数在 $x=0$，$x=1$，$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 均无定义，而

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^x+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=0,\qquad \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^x+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=-\frac{1+e}{e}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(e^x+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\infty,\qquad \lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{(e^x+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\infty$$

所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，故应选(A).

例 45　设函数 $F(x,y)=\left(\dfrac{1-y}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2x+y}}$，且 $(1-y)(2x+1)>0$，$y\neq-2x$，$f(x)=\lim\limits_{y\to-2x}F(x,y)$，求 $f(x)$ 的连续区间、间断点及间断点处的左右极限.

解：

$$f(x)=\lim_{y\to-2x}\left(\frac{1-y}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2x+y}}=\lim_{y\to-2x}\left(1-\frac{2x+y}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2x+y}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{y\to-2x}\frac{2x+y}{2x+1}\cdot\frac{x}{2x+y}}=e^{-\frac{x}{2x+1}}$$

使 $f(x)$ 无定义的点是使 $2x+1=0$ 的点，即为 $x=-\dfrac{1}{2}$. 因此 $f(x)$ 的连续区间为

$$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$$

$x=-\dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的间断点，且

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} e^{\frac{x}{2x+1}}=0,\qquad \lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} e^{\frac{x}{2x+1}}=+\infty$$

1.6 杂　例

题型 11　从含有 $f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的方程中求解 $f(x)$

思路启迪： 要想到 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是常数，令 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$，代入方程，然后对方程的两边求 $x\to x_0$ 的极限，得出 l，再将 l 代入方程，即得 $f(x)$.

例 46　设 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，且满足 $f(x)=5x^3+3x^2-x^{\frac{1}{1-x}}\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，求 $f(x)$.

解： 令 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=l$，代入方程可得 $f(x)=5x^3+3x^2-x^{\frac{1}{1-x}}l$，两边求 $x\to 1$ 时的极限，得

$$\begin{aligned} l=\lim_{x\to 1} f(x)&=\lim_{x\to 1}(5x^3+3x^2-x^{\frac{1}{1-x}}l)\\ &=5+3-l\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}\\ &=8-l\lim_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{1-x}}\\ &=8-le^{-1} \end{aligned}$$

解之得 $l=\dfrac{8}{1+e^{-1}}$，将 l 代入方程可得 $f(x)=5x^3+3x^2-\dfrac{8}{1+e^{-1}}x^{\frac{1}{1-x}}$.

注： 与该题型类似，如将 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 改为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，有如下变式：

【变式 1】　含有 $f(x)$ 及 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的方程，$f(x)$ 的求解.

思路启迪： 要想到 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是常数，令 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=l$，代入方程，然后方程的两边在 $[a,b]$ 上对 x 积分，得出 l，再将 l 代入方程，即得 $f(x)$.

例 47　设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且满足 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解： 设 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x=l$，则 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+l$，两边同乘以 $\sin x$，然后在 $[-\pi,\pi]$ 上对 x 积分，得

$$\begin{aligned} l=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+l\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\\ &=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\ &=-2\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

故 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\dfrac{\pi^2}{2}$.

注：本题利用了以下两点，即

(1) 奇偶积分的性质：$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0,\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

(2) 结论 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

例 48 设 $f(x)=3x^2+g(x)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, g(x)=4x-f(x)+2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$ 与 $g(x)$.

解：设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=l,\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=m$，代入方程可得

$$\begin{cases}f(x)=3x^2+g(x)-l\\ g(x)=4x-f(x)+2m\end{cases}$$

上述两个方程的两边在$[0,1]$上对 x 积分，得

$$\begin{cases}l=1+m-l\\ m=2-l+2m\end{cases},\quad 解之得\ l=-1,\quad m=-3$$

故

$$\begin{cases}f(x)=3x^2+g(x)+1\\ g(x)=4x-f(x)-6\end{cases},\quad 解之得\begin{cases}f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}\\ g(x)=-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{7}{2}\end{cases}$$

【变式 2】 含有 $f(x,y)$ 及 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的方程，$f(x,y)$ 的求解.

思路启迪：要想到 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是常数，令 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=l$，代入方程，然后方程的两边在区域 D 上对 x,y 积分，得出 l，再将 l 代入方程，即得 $f(x,y)$.

例 49 设 D 是由 $y=x^2$，$x=1$ 及 x 轴所围成的区域，$f(x,y)$ 在 D 上连续，且

$$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求 $f(x,y)$.

解：令 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=l$，则 $f(x,y)=xy+l$，两边在区域 D 上对 x,y 积分，得

$$\begin{aligned}l&=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+l\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{x^2}y\mathrm{d}y+l\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x+l\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{12}+\frac{l}{3}\end{aligned}$$

解之得 $l=\frac{1}{8}$，故 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$.

题型 12　当 $x\to 0$ 时，求含有 $e^{\frac{1}{x}}$，$\arctan\frac{1}{x}$，$\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$，$|x|$ 的极限

思路启迪： 要分别求 $x\to 0^+$ 和 $x\to 0^-$ 时的左、右极限，当左、右极限相等时，极限存在，否则不存在.

例 50　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解： 令 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$，于是

$$f_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1$$

$$f_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

例 51　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$.

解： 令 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$，于是

$$f_-(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}=0\quad\text{（无穷小与有界数之积为无穷小）}$$

$$f_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}\cdot\arctan\frac{1}{x}=0\quad\text{（无穷小与有界数之积为无穷小）}$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=0$.

注： 类似地，当 $x\to\infty$ 时，有如下变式.

【变式 1】　当 $x\to\infty$ 时，极限式中含有 e^x，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$，$|x|$. 要分别求 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的左、右极限，当左、右极限相等时，极限存在，否则不存在.

例 52　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2|x|}{1+x}\arctan x$.

解： 令 $f(x)=\dfrac{1+2|x|}{1+x}\arctan x$，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2|x|}{1+x}\arctan x = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+2|x|}{1+x}\arctan x = (-2)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

故$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2|x|}{1+x}\arctan x=\pi$.

题型 13　含 $f(x+a)-f(x)$ 的非 $\frac{0}{0}$ 型极限式且 $f(x)$ 可导

思路启迪：利用拉格朗日中值定理处理，即有

$$f(x+a)-f(x)=af'(\xi),\quad x<\xi<x+a$$

例 53　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$.

解：(1) 令 $f(t)=\sin\sqrt{t}$，显然，当 $x>0$ 时，$f(t)$在$[x,x+1]$上满足拉格朗日中值定理的条件，于是有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f'(\xi)$$

即

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x} = \cos\sqrt{\xi}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\xi}},\quad x<\xi<x+1$$

故原极限$=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\cos\sqrt{\xi}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=0$.

(2) 令 $f(t)=\ln\arctan t$，显然，当 $x>0$ 时，$f(t)$在$[x,x+1]$上满足拉格朗日中值定理的条件，于是有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f'(\xi)$$

即

$$\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x = \frac{1}{\arctan\xi}\cdot\frac{1}{1+\xi^2},\quad x<\xi<x+1$$

故原极限$=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{x^2}{\arctan\xi}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{2}{\pi}$.

第 2 章　导数与微分

●重要定理、公式和结论

2.1　导数和微分的概念

1. 导数的概念

(1) 概念

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

令 $x_0+\Delta x=x$,则

$$(1)\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{2}$$

令 $\Delta x=h$,则

$$(1)\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{3}$$

设 $\varphi(x)\to 0$,则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{f[x_0+\varphi(x)]-f(x_0)}{\varphi(x)}$.

(2) 几何意义

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$,表示曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的切线的斜率 $\tan\alpha$,即 $f'(x_0)=\tan\alpha$. 几何意义如图 2-1 所示。

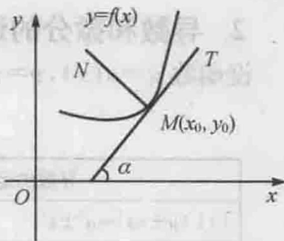


图 2-1

① 当 $f'(x_0)$存在时,曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的切线 MT 的方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

② 当 $f'(x_0)\neq 0$ 时,曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的法线 MN 的方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

③ 当 $f'(x_0)=0$,曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的法线方程为 $x=x_0$.

2. 左右导数

左导数:　$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

右导数:　$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3. 微分

设函数 $y=f(x)$ 对 x 可导,则 $f'(x)\mathrm{d}x$ 称为 $y=f(x)$ 的微分,记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$,即 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$,可见,导数=函数微分/自变量微分,因此,导数也称微商.

2.2 导数公式和运算法则

1. 常用的导数公式

(1) $c'=0$(c 为常数);

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 为实数),常用$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$,$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$,特别$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;

(4) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$($a>0$ 且 $a\neq1$),特别$(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

(5) $(\sin x)'=\cos x$;　　(6) $(\cos x)'=-\sin x$;

(7) $(\tan x)'=\sec^2 x$;　　(8) $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(9) $(\sec x)'=\sec x\tan x$;　　(10) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(11) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(12) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(13) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$;　　(14) $(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

记住的窍门:凡是"正弦、正切"的导数的符号都为正;凡是"余弦、余切"的导数的符号都为负.

2. 导数和微分的运算法则

设函数 $u=u(x)$,$v=v(x)$均可导,则有如下运算关系,如表 2-1 所列.

表 2-1

导数的运算法则	微分的运算法则
(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$	(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$
(2) $(uv)'=uv'+u'v$,特别$(cu)'=cu'$(c 为常数)	(2) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$,特别 $\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u$($c$ 为常数)
(3) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$($v\neq0$)	(3) $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$($v\neq0$)
(4) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$($c$ 为常数)	(4) $\mathrm{d}\left(\frac{c}{v}\right)=-\frac{c\mathrm{d}v}{v^2}$

3. 常用函数的 n 阶导数公式

(1) $(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$,特别当 m 为正整数时,有

$$(x^m)^{(n)}=\begin{cases}m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & n\leqslant m\\0, & n>m\end{cases}$$

(2) $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$($a>0$ 且 $a\neq1$),特别$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$;

(3) $\left[\frac{1}{(ax+b)^m}\right]^{(n)}=\frac{(-1)^n m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)a^n}{(ax+b)^{m+n}}\quad(a\neq0)$；

(4) $[\ln(ax+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\ a^n}{(ax+b)^n}$；

(5) $[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，

$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$；

(6) 莱布尼兹公式：若 $u(x)$，$v(x)$ 均 n 阶可导，则

$$(ux)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$$

其中，$u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$，一般多项式选作 v.

2.3　重要定理

定理 1　一元函数可导必连续，即设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续；反之不真，即连续未必可导.

定理 2　$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

定理 3　$f(x)$ 可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 可导.

定理 4　设函数 $y=f(x)$ 单调可导，且 $f'(x)\neq0$，则其反函数 $x=\phi(y)$ 单调可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\phi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

即函数与其反函数的导函数互为倒数.

定理 5　一阶微分形式不变性. 设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且它们都可微，则

$$\mathrm{d}y=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u$$

不论 u 是自变量还是中间变量，函数的微分形式都是相同的. 我们称这一性质为函数的一阶微分形式不变性.

● 核心题型及思路启迪

2.4　与导数定义和性质有关的命题

题型 14　求含有抽象函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限

思路启迪： 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$，计算 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f[a+u(x)]-f(a)}{u(x)}$ 时，一般利用导数的定义，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[a+u(x)]-f(a)}{u(x)}=f'(a)$$

但需注意条件是$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$. 若$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0^+$（或$0^-$），则不能用该方法，因为此时$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f[a+u(x)]-f(a)}{u(x)}=f'(a)$未必成立.

例 1 设$f'(x_0)$存在，求极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}$.

解：
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}\cdot(-2)-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}\cdot 3=-5f'(x_0)$$

注：若没有告知$f'(x_0)$存在，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$不一定正确. 例如：函数$y=f(x)=|x|$在$x=0$处不可导，但
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0-\Delta x)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-|-\Delta x|}{2\Delta x}=0$$

例 2 设$f(0)=0$，则$f(x)$在点$x=0$可导的充要条件为（　　）.

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$

解：(A)，(C)项极限式的分母均为h^2，而$\lim\limits_{h\to 0}h^2=0^+$，所以由思路启迪中的分析，可排除(A)，(C).

对于(D)项，令$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则$f(x)$在点$x=0$处不可导，但下式存在，即
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

故选(C).

例 3 设$f(x)$为可导的偶函数，且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=2$，求曲线$y=f(x)$在$x=-1$处的法线斜率.

解：由题设可知$f(-x)=f(x)$，则$-f'(-x)=f'(x)$.

又由$2=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(1)$得$f'(1)=-1$，于是$f'(-1)=-f'(1)=1$.

故曲线$y=f(x)$在$x=-1$处的法线斜率$k=-\dfrac{1}{f'(-1)}=-1$.

例 4 设函数$f(x)$满足$f(1)=0$，$f'(1)=1$，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\ln(1+x^2)+e^x-x]}{\tan x(\sqrt{1+x}-1)}$.

解：因为$f[\ln(1+x^2)+e^x-x]=f[1+u(x)]-f(1)$，其中
$$u(x)=\ln(1+x^2)+e^x-x-1\to 0(x\to 0)$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f[\ln(1+x^2)+e^x-x]}{\tan x(\sqrt{1+x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f[\ln(1+x^2)+e^x-x]}{x\cdot\frac{1}{2}x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{f[\ln(1+x^2)+e^x-x]-f(1)}{\ln(1+x^2)+e^x-x-1}\cdot\frac{\ln(1+x^2)+e^x-x-1}{x^2}$$

$$=2f'(1)\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\right]$$

$$=2f'(1)\left(1+\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\right)=2f'(1)\left(1+\frac{1}{2}\right)=3f'(1)$$

注： 下式是错误的，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f[\ln(1+x^2)+e^x-x]}{\tan x(\sqrt{1+x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'[\ln(1+x^2)+e^x-x]\left(\frac{2x}{1+x^2}+e^x-1\right)}{x\cdot\frac{1}{2}x}$$

因为题中并没有说明函数 $f()$ 是可导的，所以需利用定义来做.

例 5 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}e^t f(1+e^{x^2}-e^t)\mathrm{d}t}{x^2\ln\cos x}$$

解： 根据导数的几何意义可知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \tag{1}$$

式(1)与题中给出的切线方程 $y=x-1$ 相比较可得 $f(1)=0,f'(1)=1$. 当 $x\to 0$ 时，有

$$\ln\cos x\sim-\frac{1}{2}x^2 \tag{2}$$

另外，极限式的变上限积分的被积式中含抽象函数 $f(1+e^{x^2}-e^t)$，遇到这种情况，一般令 $u=1+e^{x^2}-e^t$，则当 $t=0$ 时，$u=e^{x^2}$；当 $t=x^2$ 时，$u=1$. 故

$$\int_0^{x^2}e^t f(1+e^{x^2}-e^t)\mathrm{d}t=\int_{e^{x^2}}^1 f(u)\mathrm{d}(-u)=\int_1^{e^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u \tag{3}$$

故由式(1)、式(2)、式(3)及洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}e^t f(1+e^{x^2}-e^t)\mathrm{d}t}{x^2\ln\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{e^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u}{x^2\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}\left(\frac{0}{0}\right)=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})e^{x^2}\cdot 2x}{4x^3}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-f(1)}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$$

$$=-f'(1)\cdot 1=-1$$

注： 本题利用了变限积分的导数. 设函数 $\varphi(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，$F(x)=\int_a^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

例 6 设 $f(x)$是以 5 为周期的连续函数，且在 $x=0$ 的邻域内有

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x) \tag{1}$$

其中$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=0$；又 $f(x)$在 $x=1$ 处可导，求 $y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

解： 由题设可知，$f(x)=f(x+5)$，$f(6)=f(1)$，$f'(x)=f'(x+5)$，$f'(6)=f'(1)$. 式(1)的两边取 $x\to 0$ 时的极限，得

$$f(1)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0,\quad 即\ f(6)=0$$

式(1)的两边同除以 x，然后取 $x\to 0$ 时的极限.

$$\begin{aligned}左边&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}+3\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]\\&=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)\end{aligned}$$

$$右边=\lim_{x\to 0}\frac{8x+\alpha(x)}{x}=8$$

所以 $4f'(1)=8\Rightarrow f'(1)=2$，即 $f'(6)=2$，故曲线 $y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程为

$$y-f(6)=f'(6)(x-6),\quad 即\ y=2(x-6)$$

题型 15 与抽象函数的导数相关的命题

思路启迪： 在函数表达式中含有抽象函数记号，仅知其在某点连续，但不知其是否可导，求其导数时，一般利用导数的定义：

$$\begin{aligned}f'(x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

注：(1) 函数在一点连续，但不一定可导，如 $y=|x|$在 $x=0$ 处连续，但不可导.

(2) 某些简单函数在某点处的导数用定义求也相当简便.

例 7 求下列函数在指定点处的导数：

(1) 设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处可导，求 $f'(0)$；

(2) 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，又对任意的 x，有 $f(2+x)=2f(x)$，求$f'(2)$.

解：(1) 由题设可知，$f(0)=\varphi(a)-\varphi(a)=0$，因为题目中只说明 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处可导，并没有说明 $\varphi(x)$在 $x=0$ 处是否可导，所以求 $f'(0)$时必须用导数的定义.

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{bx}\cdot b-\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{-bx}\cdot(-b)\\&=b\varphi'(a)+b\varphi'(a)=2b\varphi'(a)\end{aligned}$$

(2) 题目中并没有给出 $f(x)$ 的具体表达式，又没有说明 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是否可导，所以求 $f'(2)$ 必须用导数的定义.

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2f(\Delta x)-2f(0)}{\Delta x}=2f'(0)=1$$

例 8 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=a$，求 $f'(x_0)$.

解：由题设可知 $f(x)$ 连续，所以 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=a\cdot 0=0$，故

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=a$$

注：该题结论最好记住.

例 9 设 $f(x)$ 连续，$f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得(　　).

(A) 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f(x)$ 单增　　(B) 当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$f(x)$ 单减

(C) 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f(x)>f(0)$　　(D) 当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$f(x)>f(0)$

分析：遇到抽象函数 $f(x)$ 在某点的导数 $f'(0)>0$ 时，则根据导数的定义可写出 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$，然后要想到极限的保号性.

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$，则由极限的保号性可知，存在 $\delta>0$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，恒有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0\Rightarrow f(x)>f(0)$，故(C)项正确.

例 10 (1) 设 $f(x)$ 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上，若对任意 x_1,x_2，恒有 $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant(x_2-x_1)^2$，求 $f'(x)$.

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 都定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上，且对任意 x,y，恒有

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

且 $f(0)=0,g(0)=1,f'(0)=1,g'(0)=0$，求 $f'(x)$.

解：(1) 不妨设 $x_1\neq x_2$，由已知不等式有

$$0\leqslant\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leqslant|x_2-x_1|$$

而 $\lim\limits_{x_2\to x_1}|x_2-x_1|=0$，则由夹逼定理有

$$\lim_{x_2\to x_1}\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|=0,\qquad 所以\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$$

由此可知，$f(x)$ 在 $x=x_1$ 处可导，且 $f'(x_1)=0$；又由 x_1 的任意性可知，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，且 $f'(x)\equiv 0$.

(2) $f'(x)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x)g(y)+f(y)g(x)-f(x)}{y}$

$=f(x)\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{g(y)-1}{y}+g(x)\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)-0}{y}$

$=f(x)\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{g(y)-g(0)}{y}+g(x)\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)-f(0)}{y}$

$=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)=g(x)$

例 11 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则下列结论中正确的是(　　).

(A) 若 $f(x)$为周期函数,则 $f'(x)$也是周期函数

(B) 若 $f(x)$为单调增加函数,则 $f'(x)$也是单调增加函数

(C) 若 $f(x)$为偶函数,则 $f'(x)$也是偶函数

(D) 若 $f(x)$为奇函数,则 $f'(x)$也是奇函数

解: 因为函数 $f(x)$为抽象函数,故可先用举反例法排除.

取 $f(x)=x^3, f'(x)=3x^2$,可排除(B)(D);

取 $f(x)=x^2, f'(x)=2x$,可排除(C).

事实上,若 $f(x+T)=f(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$,故(A)项正确.

注: 请记住以下结论,即

(1) 可导的周期函数的导函数是周期函数,且周期不变;

(2) 可导的偶函数的导函数是奇函数,可导的奇函数的导函数是偶函数.

题型 16 判断函数的可导性

思路启迪: 利用导数存在的充要条件和结论,即 $f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.
记住: $y=|x-x_0|$在 x_0 处不可导,但在 x_0 处连续; $y=(x-x_0)|x-x_0|$在 x_0 处可导.

例 12 $y=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解:
$$y=(x^2-x-2)|x^3-x|=(x-2)(x+1)|x(x-1)(x+1)|$$
立刻可得出函数在 $x=0, x=1$ 处不可导,故(C)项正确.

例 13 设 $f(x)$可导,令 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$在 $x=0$ 处可导的( ).

(A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

分析: 遇到函数中带绝对值符号而判断函数可导或连续时,一般要先去掉绝对值符号.

解: 令 $0<\delta<\pi$,则
$$F(x)=\begin{cases} f(x)(1-\sin x), & -\delta<x<0 \\ f(x)(1+\sin x), & 0<x<\delta \end{cases}$$
则 $F'(0)$存在$\Leftrightarrow F'_-(0)=F'_+(0)$,而
$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to0^-}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}=f'(0)-\lim_{x\to0^-}f(x)=f'(0)-f(0)$$
同理
$$F'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0^+}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}=f'(0)+\lim_{x\to0^+}f(x)=f'(0)+f(0)$$
则 $F'_-(0)=F'_+(0)\Leftrightarrow f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$,故(C)正确.

例 14 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, $f(x)=kf(x+2)$,又

$x\in[0,2]$时，$f(x)=x(x^2-4)$.

(1) 求 $f(x)$在$[-2,0)$处的表达式；

(2) 问 k 为何值时，$f'(0)$存在.

解：(1) 令$-2\leqslant x<0$，则 $0\leqslant x+2<2$. 由题设，$x\in[0,2]$时，$f(x)=x(x^2-4)$，所以

$$f(x+2)=(x+2)[(x+2)^2-4]=x(x+2)(x+4)$$

又 $f(x)=kf(x+2)$，所以 $f(x)=kx(x+2)(x+4)$.

$$(2)\ f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)-0}{x}=8k$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-4)-0}{x}=-4$$

所以，$f'(0)$存在$\Leftrightarrow f'_-(0)=f'_+(0)\Leftrightarrow 8k=-4\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$. 故当 $k=-\frac{1}{2}$时，$f'(0)$存在.

2.5 各种函数的导数或微分

题型 17 求一元复合函数的导数或微分

思路启迪：利用复合函数求导的“链式法则”. 设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，f,φ 均可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$对 x 可导，且有 $y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\cdot1$(实际上从最外层往里一层层求，注意指数)，即复合函数的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数.

例 15 设 $y=f^n(\varphi^m(e^{x^2}))$，$f,\varphi$ 均可导，求 y'.

解：

$$y=nf^{n-1}(\varphi^m(e^{x^2}))\cdot f'(\varphi^m(e^{x^2}))\cdot m\varphi^{m-1}(e^{x^2})\cdot\varphi'(e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot 2x$$

例 16 设 $y=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，求 $f'(0)$.

解：

$$y'(0)=\left[f'\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'\right]\bigg|_{x=0}$$
$$=\left[\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\cdot\frac{2}{(x+1)^2}\right]\bigg|_{x=0}=\arctan 1\cdot 2=\frac{\pi}{2}$$

例 17 设 $f(x)$为二阶可导函数，且 $f(\tan x)=\frac{1+\sin^2x}{\cos^2x}$，求 $f''(x)$.

解：$f(\tan x)=\frac{1+\sin^2x}{\cos^2x}=\sec^2x+\tan^2x=1+2\tan^2x$，令 $\tan x=t$，有 $f(t)=1+2t^2$. 于是 $f(x)=1+2x^2$，则 $f'(x)=4x$，$f''(x)=4$.

题型 18 求参数方程所确定的函数的导数

思路启迪：设$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$\varphi(t)$，$\psi(t)$均二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq0$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$；

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

注: 求二阶导数时千万不要忘了乘以$\frac{dt}{dx}$.

例 18 设$\begin{cases}x=\cos t^2\\ y=\int_0^{t^2}e^{-u^2}\sin u\,du\end{cases}$,求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $dx=-2t\sin t^2dt,dy=2te^{-t^4}\sin t^2dt$,则

$$\frac{dy}{dx}=-e^{-t^4},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(-e^{-t^4})\cdot\frac{dt}{dx}=-e^{-t^4}(-4t^3)\cdot\frac{1}{-2t\sin t^2}=-\frac{2t^2e^{-t^4}}{\sin t^2}$$

例 19 求曲线$\rho=a\sin 2\theta$在$\theta=\frac{\pi}{4}$处的切线方程.

分析: 求切线方程应化为直角坐标求解.

解: $\begin{cases}x=\rho\cos\theta=a\sin 2\theta\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta=a\sin 2\theta\sin\theta\end{cases}$,则当$\theta=\frac{\pi}{4}$时,$\begin{cases}x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{a}{\sqrt{2}}\end{cases}$,且

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{2a\cos 2\theta\sin\theta+a\sin 2\theta\cos\theta}{2a\cos 2\theta\cos\theta-a\sin 2\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-1$$

所以,切线方程为$y-\frac{a}{\sqrt{2}}=-1\cdot\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$,即$x+y-\sqrt{2}a=0$.

题型 19 求一元隐函数的导数或微分

思路启迪: 先确定因变量和自变量,然后可利用以下方法.

(1) 方程两边对自变量x求导,切记因变量y是x的函数,y的函数是x的复合函数.求出各项的导数后,将含y'的项移到等式一边,不含y'的项移到另一边,解出y'即可.

(2) 公式法:$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$,其中$F'_y(x,y)\neq 0$.

(3) 利用一阶微分形式的不变性,在方程两边求微分,然后解出$\frac{dy}{dx}$.

例 20 设方程$xy^2+e^y=\cos(x^2+y^2)$,求y'.

解: 方法 1 两边对x求导得

$$y^2+2xyy'+e^yy'=-\sin(x^2+y^2)(2x+2yy')$$

$$y'=-\frac{y^2+2x\sin(x^2+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x^2+y^2)}$$

方法2 $F(x,y)=xy^2+e^y-\cos(x^2+y^2)=0$

$$F'_x(x,y)=y^2+2x\sin(x^2+y^2),\qquad F'_y(x,y)=2xy+e^y+2y\sin(x^2+y^2)$$

于是
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{y^2+2x\sin(x^2+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x^2+y^2)}$$

方法3 两边微分得

$$d(xy^2+e^y)=d[\cos(x^2+y^2)]$$

$$\Rightarrow y^2dx+2xydy+e^ydy=-\sin(x^2+y^2)(2xdx+2ydy)$$

$$\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2+2x\sin(x^2+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x^2+y^2)}$$

例21 设有方程 $\int_0^{xy}e^{-t^2}dt+\int_0^{y^2}\frac{\sin t}{t}dt=\ln y$,求 y'.

解:两边对 x 求导,得

$$e^{-(xy)^2}(y+xy')+\frac{\sin y^2}{y^2}\cdot 2y\cdot y'=\frac{y'}{y}$$

两边同乘以 y,得

$$y^2e^{-x^2y^2}+xye^{-x^2y^2}y'+2\sin y^2\cdot y'=y'$$

所以
$$y'=\frac{y^2e^{-x^2y^2}}{1-2\sin y^2-xye^{-x^2y^2}}$$

例22 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y+1)=x^3y+\sin x$ 确定.

(1) 求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,y(0))$ 处的切线方程;

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}ny\left(\frac{2}{n}\right)$.

解:(1) 将 $x=0$ 代入方程,得 $y=0$,方程 $\ln(x^2+y+1)=x^3y+\sin x$ 两边对 x 求导得

$$\frac{2x+y'}{x^2+y+1}=x^3y'+3x^2y+\cos x$$

代入 $x=0,y=0$,得 $y'(0)=1$,因此,曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,y(0))$ 处的切线方程为 $y=x$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}ny\left(\frac{2}{n}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y\left(\frac{2}{n}\right)-y(0)}{\frac{2}{n}}=2y'(0)=2.$

题型20 求幂指函数的导数或微分

思路启迪:幂指函数的形式为 $y=u(x)^{v(x)}$,$u(x)>0$,且 $u(x)\neq 1$.

求幂指函数的导数有两种方法:

(1) 利用对数恒等式将幂指函数写成 $y=u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$,再按复合函数求导法则求 $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=e^{v(x)\ln u(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

$$=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

(2) 两边取对数,得到隐函数 $\ln y=v(x)\ln u(x)$ 的形式,然后按隐函数求导数的思路求$\frac{dy}{dx}$.

例 23 设 $y=x^{5^x}+x^x+f(\cos^2 x)$,$f$ 可导,求 y'.

解: $y=e^{5^x\ln x}+e^{x\ln x}+f(\cos^2 x)$

$$y'=e^{5^x\ln x}\left(5^x\ln 5\ln x+5^x\cdot\frac{1}{x}\right)+e^{x\ln x}(\ln x+1)-f'(\cos^2 x)2\cos x\sin x$$

$$=x^{5^x}5^x\left(\ln 5\ln x+\frac{1}{x}\right)+x^x(\ln x+1)-f'(\cos^2 x)\sin 2x$$

例 24 已知 $x^y=y^x$,求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

解: 方程两边取对数,有

$$y\ln x=x\ln y$$

两边对 x 求导得

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+x\frac{y'}{y}$$

而 $x=1$ 时,$y=1$,故$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=1$.

例 25 设 $y=\left(\sin\frac{x}{1+x}\right)^{\ln(1+x)}$,求 y'.

解: 函数两边取对数,得

$$\ln y=\ln(1+x)\cdot\ln\sin\frac{x}{1+x}$$

上式两边对 x 求导,得

$$\frac{y'}{y}=[\ln(1+x)]'\ln\sin\frac{x}{1+x}+\ln(1+x)\left(\ln\sin\frac{x}{1+x}\right)'$$
$$=\frac{1}{1+x}\ln\sin\frac{x}{1+x}+\ln(1+x)\cot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

故

$$y'=y\left[\frac{1}{1+x}\ln\sin\frac{x}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\cot\frac{x}{1+x}\right]$$
$$=\left(\sin\frac{x}{1+x}\right)^{\ln(1+x)}\left[\frac{1}{1+x}\ln\sin\frac{x}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\cot\frac{x}{1+x}\right]$$

题型 21 求函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分

思路启迪: 两边取对数,然后按隐函数求导法则做. 取完对数求导时切记 y 是 x 的函数.

例 26 设 $y=x\sin x\sqrt[3]{\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}\ln x}}$,求 y'.

解: 函数两边取对数,得

$$\ln y=\ln x+\ln \sin x+\frac{1}{3}\ln(x-2)-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{1}{3}\ln\ln x$$

上式两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\cot x+\frac{1}{3(x-2)}-\frac{x}{3(x^2+2)}-\frac{1}{3x\ln x}$$

故

$$y'=y\left[\frac{1}{x}+\cot x+\frac{1}{3(x-2)}-\frac{x}{3(x^2+2)}-\frac{1}{3x\ln x}\right]$$

$$=x\sin x\sqrt[3]{\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}\ln x}}\left[\frac{1}{x}+\cot x+\frac{1}{3(x-2)}-\frac{x}{3(x^2+2)}-\frac{1}{3x\ln x}\right]$$

题型 22　求分段函数的导数或微分

思路启迪: (1) 各区间段内导数的求法和前面所讲的导数的求法无异,要注意的是分段点处的导数一定要用导数的定义求. 若分段函数在分段点两侧表达式不同,则要分别求其左右的导数,当且仅当左、右导数存在且相等时,函数在分段点的导数才存在.

① 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧表达式相同,则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

② 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧表达式不相同,则分别求出 $x=x_0$ 处的左右导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

然后验证 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 是否相等,从而得出 $f'(x_0)$ 是否存在.

也可先检验 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 是否成立,如果不成立,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续,从而不可导.

千万不能这样做:

先求 $x<x_0$(或 $x>x_0$)时 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$,再求 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$(或 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$),这是因为导函数未必连续.

(2) 当 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导时,可通过解方程组 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\\ f'_-(x_0)=f'_+(x_0)\end{cases}$ 确定 $f(x)$ 表达式中包含的参数.

例 27 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\leqslant 0\\ 2x, & 0<x<1\\ \dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1\end{cases}$ 的不可导点是( ).

(A) $x=-1$ (B) $x=0$ (C) $x=1$ (D) $x=2$

分析：判断分段函数的不可导点，首先考虑分段点的可导性. 一般利用可导的充要条件：左右导数存在且相等. 在单选题中，根据一元函数的不连续点一定是不可导点，且判断连续性相对要容易一些，所以一般先判断分段点的连续性.

解：显然，函数在非分段点皆可导. 先考查分段点的连续性.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2x=0$，$f(0)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

又因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2x=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1$，$f(1)=1$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，因此也不可导. 故(C)项正确.

例 28 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x+1)=2f(x)$；又 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$，试讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的可导性.

解：(1) 令 $-1\leqslant x<0$，则 $0\leqslant x+1<1$，由题设，$0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$，所以

$$f(x+1)=(x+1)[1-(x+1)^2]=-x(x+1)(x+2)$$

又 $f(x)=\dfrac{1}{2}f(x+1)$，所以 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x(x+1)(x+2)$，即

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x(x+1)(x+2), & -1\leqslant x<0\\ x(1-x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

下面检验 $f'_-(0)=f'_+(0)$ 是否成立.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\dfrac{1}{2}x(x+1)(x+2)-0}{x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-x^2)-0}{x}=1$$

所以 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

例 29 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，令 $F(x)=f(\varphi(x))$，求 $F'(0)$.

解：$F(x)=f(\varphi(x))=\begin{cases}f\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)-f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x^2\sin\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=f'(0)\cdot 0=0$$

例 30　设 $f(x)$ 是连续的，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，令 $F(x)=\begin{cases}\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t, & x<0\\ 0, & x=0\\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}, & 0<x<1\end{cases}$，求 $F'(x)$.

解：当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t \xlongequal{u=xt} \int_0^x f(u)\frac{1}{x}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，于是

$$F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\frac{f(x)}{x}$$

当 $0<x<1$ 时，$F(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$，于是 $F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$；

当 $x=0$ 时，有

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{2x}=1$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1$$

所以 $F'(0)=1$.

综上，有
$$F'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\frac{f(x)}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, & 0<x<1\end{cases}$$

例 31　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{1+\mathrm{e}^{n(x-1)}}$ 处处可导，试确定 a,b 的值.

分析：题设右边中 x 是参数，所以必须讨论；另外，需要确定两个数的值，所以必须建立至少两个方程.

解：
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{1+\mathrm{e}^{n(x-1)}}=\begin{cases}ax+b, & x<1\\ \frac{1}{2}(1+a+b), & x=1\\ x^2, & x>1\end{cases}$$

(1) 因为 $f(x)$ 处处连续（可导必连续），所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，即

$$a+b=1=\frac{1}{2}(1+a+b),\qquad 得\ a+b=1$$

(2) 因为 $f(x)$ 处处可导，所以 $f'_-(1)=f'_+(1)$，而

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

则 $a=2,b=-1$.

题型 23　求简单函数的高阶导数

思路启迪：(1) 计算简单函数 $f(x)$ 的高阶导数时，先设法将 $f(x)$ 表示成一些常用函数，如 $x^m,a^x,\frac{1}{(ax+b)^m},\ln(ax+b),\sin(ax+b),\cos(ax+b)$ 等的线性组合，然后再利用常用函数的 n 阶导数求导. 适用于求：

① 有理分式函数的高阶导数.

利用长除法，可得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}=W(x)+\text{部分分式}$$

假分式　整式　　真分式

然后利用常用函数的 n 阶导数公式(3)求出整式及各部分分式的高阶导数.

② 三角有理式的高阶导数.

利用三角函数的倍角公式：

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\quad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

及积化和差公式：

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x]$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x]$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]$$

将三角有理式逐次降幂，最后化为 $\sin\alpha x,\cos\beta x$ 的代数和，利用常用函数的 n 阶导数公式(5)求高阶导数.

(2) 当 $f(x)$ 不能表示成上述函数的线性组合时，先求出所给函数的 1～4 阶导数，分析规律性，然后得出 n 阶导数的表达式.

例 32　设 $y=x(2x+3)^2(3x-1)^3$，求 $y^{(6)}$.

解： $y=2^2 3^3 x^6+P_5(x)$，如果求导次数超过多项式的最高次幂，则结果为零，即 $(P_5(x))^{(6)}=0$；所以 $y^{(6)}=2^2 3^3 6!$.

例 33　设 $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$，求 $f^{(n)}(x)$.

解: $f(x)=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$,则有

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2},\qquad f''(x)=(-1)^2\frac{2!}{(x-1)^3},\cdots$$

所以

$$f^{(n)}(x)=(x+1)^{(n)}+\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}\quad(n\geqslant 2)$$

例 34　设函数 $y=\frac{1}{(x-1)^2(x+2)^2}$,求 $y^{(n)}$.

解: 先将 y 化成易于计算 n 阶导数的形式,即

$$\begin{aligned}
y&=\frac{1}{(x-1)^2(x+2)^2}=\left[\frac{1}{(x-1)(x+2)}\right]^2=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\right]^2\\
&=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{2}{(x-1)(x+2)}\right]\\
&=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{9(x-1)^2}+\frac{1}{9(x+2)^2}-\frac{2}{27(x-1)}+\frac{2}{27(x+2)}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
y^{(n)}&=\left[\frac{1}{9(x-1)^2}\right]^{(n)}+\left[\frac{1}{9(x+2)^2}\right]^{(n)}-\left[\frac{2}{27(x-1)}\right]^{(n)}+\left[\frac{2}{27(x+2)}\right]^{(n)}\\
&=(-1)^n\frac{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n+1)}{9(x-1)^{n+2}}+(-1)^n\frac{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n+1)}{9(x+2)^{n+2}}-\\
&\quad(-1)^n\frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{27(x-1)^{n+1}}+(-1)^n\frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{27(x+2)^{n+1}}\\
&=(-1)^n\left[\frac{(n+1)!}{9(x-1)^{n+2}}+\frac{(n+1)!}{9(x+2)^{n+2}}-\frac{2\cdot n!}{27(x-1)^{n+1}}+\frac{2\cdot n!}{27(x+2)^{n+1}}\right]
\end{aligned}$$

例 35　设 $f(x)=\frac{1}{1+2x+4x^2}$,求 $f^{(100)}(0)$.

解: 当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时,有

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1-2x}{1-(2x)^3}=\frac{1}{1-(2x)^3}-2x\cdot\frac{1}{1-(2x)^3}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^{3n+1}
\end{aligned}$$

故 $f^{(100)}(0)=-2^{100}\cdot 100!$.

例 36　求下列各高阶导数:

(1) $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos 2x$,求 $f^{(100)}(\pi)$;

(2) $f(x)=\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x$,求 $f^{(n)}(x)$.

(3) $f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x$,求 $f^{(n)}(x)$.

解: (1) 因为

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(\frac{x}{2}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

所以

$$f^{(100)}(\pi)=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\sin\left(\frac{\pi}{2}+100\cdot\frac{\pi}{2}\right)+2^{100}\cos\left(2\pi+100\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2^{100}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+50\pi\right)+2^{100}\cos(2\pi+50\pi)=\frac{1}{2^{100}}+2^{100}$$

(2) 因为

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x$$
$$=\frac{1}{4}\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x$$
$$=\frac{1}{8}\sin 8x\cdot\cos 8x=\frac{1}{16}\sin 16x$$

所以

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{16}(16)^n\sin\left(16x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=(16)^{n-1}\sin\left(16x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

(3) 因为

$$f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x$$
$$=\sin 2x\cdot\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)$$
$$=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x$$
$$=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x)$$
$$=\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x)$$

所以

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}[(\sin 2x)^{(n)}+(\sin 4x)^{(n)}-(\sin 6x)^{(n)}]$$
$$=\frac{1}{4}\left[2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-6^n\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$
$$=2^{n-2}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^{n-1}\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-9\cdot 6^{n-2}\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

例 37 设 $y=e^x\sin x$,求 $y^{(n)}$.

分析: 本题中的 y 不能转换成一些常用函数的代数和,因此逐一计算 y 的各阶导数,并从中找出规律,得到 $y^{(n)}$.

解:

$$y'=(e^x\sin x)'=e^x(\sin x+\cos x)=e^x\cdot\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y''=\left[e^x\cdot\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]'$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (\sqrt{2})^2\,\mathrm{e}^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$y''' = \left[(\sqrt{2})^2\,\mathrm{e}^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)\right]' = (\sqrt{2})^3\,\mathrm{e}^x\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\vdots$$

依此类推得

$$y^{(n)} = (\sqrt{2})^n\,\mathrm{e}^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

例 38　设 $f(x)$ 任意阶可导，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f^{(n)}(x)=$(　　).

(A) $n!\ [f(x)]^{(n+1)}$　　(B) $n!\ [f(x)]^{n+1}$

(C) $n!\ [f(x)]^{(2n)}$　　(D) $n!\ [f(x)]^{2n}$

解:

$$f'(x) = [f(x)]^2$$

$$f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2[f(x)]^3$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3[f(x)]^2\cdot f'(x) = 3![f(x)]^4$$

$$\vdots$$

依此类推得

$$f^{n}(x) = n![f(x)]^{n+1}$$

故(B)正确.

第 3 章　不定积分

●重要定理、公式和结论

3.1　不定积分

1. 基本的不定积分公式

(1) $\int x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C(k \neq -1)$，特例$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$，$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$；

(2) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$；

(3) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0$ 且 $a \neq 1)$，$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$；

(4) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$，$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

(5) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$，$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

(6) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$，$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

(7) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$，$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

(8) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$，$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

(9) $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$，特例$\int \frac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$；

(10) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$，特例$\int \frac{1}{1 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$；

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$，特例$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$；

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$；

(13) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$；

(14) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$；

(15) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$；

(16) 递推公式：设 $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\mathrm{d}x$，则 $I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]$.

注：(1) 基本积分公式需熟记，求不定积分时，结果中千万不要忘了常数 C.

(2) 以上公式中把 x 换为以 x 为自变量的函数 u，公式仍然成立.

2. 不定积分的性质

(1) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$，其中 k 为任意常数；

(2) $\int[f_1(x)\pm f_2(x)]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\mathrm{d}x$，可以推广到有限个和的形式；

(3) $[\int f(x)\mathrm{d}x]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$；

(4) $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$.

3.2 三种基本积分方法

3.2.1 第一换元积分法(凑微分法)

1. 重要的凑微分形式

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)(a\neq 0)$；

(2) $\int x^{n-1}f(ax^n+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)(a\neq 0)$；

(3) $\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$(注：分子、分母同乘以 e^x 是凑微分的常用技巧)；

(4) $\int \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$；

(5) $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$；

(6) $\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$；

(7) $\int \sin x\cdot f(\cos x)\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$；

(8) $\int \cos x\cdot f(\sin x)\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$；

(9) $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$；

(10) $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$；

(11) $\int (1+\ln x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}(x\ln x)$；

(12) $\int \frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$；

(13) $\int\left(1+\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\frac{1}{x} = \int \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)$；

(14) $\int\left(1\pm\frac{1}{x^2}\right)dx=\int d\left(x\mp\frac{1}{x}\right)$.

2. 复杂形式的凑微分法

将被积式 $g(x)dx$ 写成 $f_1(x)f_2(x)dx$ 或 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$，即 $\int g(x)dx=\int f_1(x)f_2(x)dx$ 或 $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$，其中 $f_2(x)$ 比 $f_1(x)$ 复杂. 对 $f_2(x)$ 或 $f_2(x)$ 的主要部分求导，若其为 $f_1(x)$ 的常数倍，即 $f'_2(x)=kf_1(x)$，则 $f_1(x)dx=\frac{1}{k}df_2(x)$.

例 1 求下列积分：

(1) $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；　(2) $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}dx$；

(3) $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$；　(4) $\int\frac{\sin 2x}{(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)^3}dx$，　$|a|\neq|b|$.

解： (1) $I=\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\cdot\arctan\sqrt{x}\,dx$，因为

$$(\arctan\sqrt{x})'=\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

所以

$$I=2\int\arctan\sqrt{x}\,d(\arctan\sqrt{x})=(\arctan\sqrt{x})^2+C$$

(2) $I=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}dx$，因为

$$(1+\sqrt{1+x^2})'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

所以

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}d(1+\sqrt{1+x^2})=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C$$

(3) $I=\int\frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\,d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$

$=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}}+C$

(4) 因为

$$(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)'=a^2\cdot 2\sin x\cos x+b^2\cdot 2\cos x(-\sin x)$$
$$=(a^2-b^2)\sin 2x$$

所以

$$I=\int\frac{1}{(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)^3}\cdot\frac{1}{a^2-b^2}d(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)$$
$$=-\frac{1}{2(a^2-b^2)}\cdot\frac{1}{(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)^2}+C$$

例2 计算不定积分 $I=\int\left(\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f''(x)f^2(x)}{f'^3(x)}\right)dx$.

解： $$I=\int\frac{f(x)f'^2(x)-f''(x)f^2(x)}{f'^3(x)}dx=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f''(x)f(x)}{f'^2(x)}dx$$

因为 $$\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]'=\frac{f'^2(x)-f''(x)f(x)}{f'^2(x)}$$

所以原极限 $$I=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C$$

3. 更复杂形式的凑微分法

这是指被积函数的分母、分子同乘以 x^k 或 $\frac{1}{x^k}(k=1,2,\cdots)$，$e^x$，$\sin x$，$\cos x$ 等，可以化成复杂形式的积分.

例3 求下列积分：

(1) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$；　　(2) $\int\frac{1-x^8}{x(1+x^8)}dx$；

(3) $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$；　　(4) $\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$.

解： (1) $$I=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$$

（分子、分母同除以 x^2 凑成 $d\left(x-\frac{1}{x}\right)$ 是常用技巧）

(2) $$I=\int\frac{x^7(1-x^8)}{x^8(1+x^8)}dx=\frac{1}{8}\int\frac{1-x^8}{x^8(1+x^8)}dx^8=\frac{1}{8}\int\frac{(1+x^8)-2x^8}{x^8(1+x^8)}dx^8$$
$$=\frac{1}{8}\left[\int\frac{1}{x^8}dx^8-\int\frac{2}{1+x^8}d(1+x^8)\right]=\frac{1}{8}[\ln x^8-2\ln(1+x^8)]+C$$

(3) $$I=\int\frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}dx\quad\left(\text{因为}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)'=-\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C$$

(4) $$I=\int\frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x)\quad(\text{因为 } d(xe^x)=e^x(x+1)dx)$$
$$=\ln\frac{xe^x}{1+xe^x}+C$$

3.2.2 利用第二换元法求不定积分

常见的四种变量代换如下。

1. 三角代换

三解代换的形式如表 3-1 所列。

表 3-1

被积函数 $f(x)$ 含根式	所作代换	三角形示意图
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	a，x，t，$\sqrt{a^2-x^2}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	$\sqrt{a^2+x^2}$，x，t，a
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	x，$\sqrt{x^2-a^2}$，t，a

注：最后一定要将变量还原.

2. 倒代换

令 $x=\dfrac{1}{t}$. 可作倒代换的条件是：设 p,q 分别表示被积函数 $f(x)$ 的分母、分子关于 x 的最高次数，若 $p-q>1$，则可作倒代换；若 $p-q\leqslant 1$，则不可作倒代换.

3. 根式代换

形式为

$$\int R\left(\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\cdots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$$

令 $\sqrt[N]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$（其中 N 为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 的最小公倍数）⇒有理函数积分.

例 4 求下列积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$； (2) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x$； (3) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x$.

解：(1) 令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

$$I=\int\frac{a\cos t}{a^4\sin^4 t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cot^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2}\int\cot^2 t\mathrm{d}\cot t$$

$$=-\frac{1}{3a^2}\cot^3 t+C=-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)^3+C$$

另解：令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=\int t^4\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int t\sqrt{a^2t^2-1}dt$$

$$=-\frac{1}{2a^2}\int\sqrt{a^2t^2-1}\,d(a^2t^2-1)=-\frac{1}{3a^2}\left(\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right)^3+C$$

(2) 令 $x=a\sec t$,则 $dx=a\sec t\tan t dt$,所以

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\int\frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan t dt$$

$$=\int a\tan^2 t dt=a\int(\sec^2 t-1)dt=a\tan t-at+C$$

$$=a\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}-a\arccos\frac{a}{x}+C$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$$

(3) 作倒代换,令 $x=\frac{1}{t}$,$dx=-\frac{1}{t^2}dt$,则

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}dx=-\int\frac{t}{\sqrt{1+3t^2}}dt=-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot 2\sqrt{1+3t^2}+C=-\frac{\sqrt{x^2+3}}{3x}+C$$

例 5 求不定积分 $I=\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx$.

解: 先将被积函数中的 $\sqrt{x^4+1}$ 化为 $\sqrt{1-t^2}$,$\sqrt{1+t^2}$ 或 $\sqrt{t^2-1}$ 的形式,再作变量代换.

$$I=\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx=\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{(x^4+2x^2+1)-2x^2}}dx$$

$$=\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)^2}}dx$$

$$\overset{令\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}=\sin t}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{\cos t}d\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)\quad(因为\ d(\sin t)=\frac{\sqrt{2}(1-x^2)}{(x^2+1)^2}dx)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int dt=-\frac{t}{\sqrt{2}}+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}+C$$

4. 指数代换

它适用于被积函数 $f(x)$ 是由 a^x 所构成的代数式. 令 $a^x=t$,则 $dx=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{dt}{t}$.

例 6 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{2^x}{1+2^x+4^x}dx$; (2) $\int\frac{dx}{e^x(1+e^{2x})}$.

解: (1) 令 $2^x=t$,则 $dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{dt}{t}$. 于是

$$\int\frac{2^x}{1+2^x+4^x}dx=\int\frac{t}{1+t+t^2}\cdot\frac{1}{t\ln 2}dt=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan\frac{2^{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C$$

(2) 令 $\mathrm{e}^x=t$,则 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$. 于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{2x})}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2(1+t^2)}=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{t}+\arctan t+C=-\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\arctan \mathrm{e}^x+C$$

3.2.3 利用分部积分法求不定积分

1. 分部积分公式

设 $u=u(x)$,$v=v(x)$具有连续导数,则

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}v$$

注: 分部积分法的目的是通过分部积分公式,将不易求解的不定积分 $\int u\mathrm{d}v$ 转化成另一个易于求解的不定积分 $\int v\mathrm{d}u$. 分部积分法的关键是如何选择 u,$\mathrm{d}v$. 选择原则是:

(1) 积分容易者选作 $\mathrm{d}v$,求导简单者选作 u.

(2) 在二者不可兼得的情况下,首先要保证的是前者.

2. 分部积分的推广公式

设 $u=u(x)$,$v=v(x)$有 $n+1$ 阶连续导数,则

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-u'''v^{(n-3)}+\cdots+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$$

用表格法表示推广公式如表 3 - 2 所列.

表 3 - 2

u的各阶导数	u		u'		u''		u'''		$\cdots$	$u^{(n+1)}$
		⊕		⊖		⊕		⊖		
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n+1)}$		$v^{(n)}$		$v^{(n-1)}$		$v^{(n-2)}$		$\cdots$	v

计算规则如下:

(1) 推广公式的各项(不包括符号)为从左上到右下错位相乘,最后一项为 $\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$;

(2) 各项符号为"+"、"-"相间,最后一项符号为$(-1)^{n+1}$;

(3) 当表格中同一列的两个函数乘积等于所给被积函数的常数倍时,求导和求原函数工作不再进行,用解方程的方法即可求得积分. 当被积函数中有一个因子为对数或反三角函数时,须做变量代换,把它换成指数或三角函数时才能使用表格法.

下面是几种典型的用分部积分法求解的类型.

类型 1　$\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x, \int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x, \int P_n(x)\cos ax\mathrm{d}x$，其中 $P_n(x)$ 是最高次数为 n 的关于 x 的多项式.

一般选 $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x, \sin ax\mathrm{d}x, \cos ax\mathrm{d}x$；$u(x)=P_n(x)$，$\mathrm{e}^{iax}=\cos ax+i\sin ax$. 用表格法求解时，当 $P_n(x)$ 的某阶导数为 0 时，求导和求原函数的工作停止.

例 7　求下列积分：

(1) $\int(2x^2-3x+1)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int(x^2+2x-3)\sin x\mathrm{d}x$.

解：(1) 用表格法求解.

$2x^2-3x+1$	$4x-3$	4	0	(微分)
e^{-2x}	$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$	$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}$	$-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x}$	(积分)

$$I=-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x}(8x^2-12x+4+8x-6+4)+C=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}(4x^2-2x+1)+C$$

(2) 用表格法求解.

x^2+2x-3	$2x+2$	2	0	(微分)
$\sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	(积分)

$$I=-(x^2+2x-5)\cos x+(2x+2)\sin x+C$$

类型 2　$\int\mathrm{e}^{kx}\sin ax\mathrm{d}x, \int\mathrm{e}^{kx}\cos ax\mathrm{d}x$，若用分部积分，两项均可选作 u.

$$\int\mathrm{e}^{kx}\sin ax\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{kx})' & (\sin ax)' \\ \mathrm{e}^{kx} & \sin ax\end{vmatrix}}{k^2+a^2}+C,\quad \int\mathrm{e}^{kx}\cos ax\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{kx})' & (\cos ax)' \\ \mathrm{e}^{kx} & \cos ax\end{vmatrix}}{k^2+a^2}+C$$

例 8　求不定积分 $I=\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$.

解：

$$\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^x)' & (\cos x)' \\ \mathrm{e}^x & \cos x\end{vmatrix}}{1+1}+C$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x & -\sin x \\ \mathrm{e}^x & \cos x\end{vmatrix}}{2}+C=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)+C$$

类型 3　$\int P_n(x)\ln x\mathrm{d}x, \int P_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x, \int P_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$.

一般选择：$u(x)=\ln x, \arcsin x, \arctan x$；$v(x)=P_n(x)$. 其中 $u(x)$ 求导后就变为别的

函数.

例 9 求下列积分:

(1) $\int \frac{1}{x^3}\arctan x\mathrm{d}x$; (2) $\int x^{\mu}\ln x\mathrm{d}x$;

(3) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$; (4) $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.

解: (1) $I=-\frac{1}{2x^2}\arctan x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2x^2}\arctan x+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2x^2}\arctan x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\arctan x+C$

(2) 含有参数的命题要进行讨论.

当 $\mu\neq-1$ 时

$$I=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\ln x-\frac{1}{\mu+1}\int x^{\mu+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\ln x-\frac{1}{(\mu+1)^2}x^{\mu+1}+C$$

当 $\mu=-1$ 时

$$I=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

(3) $I=\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$

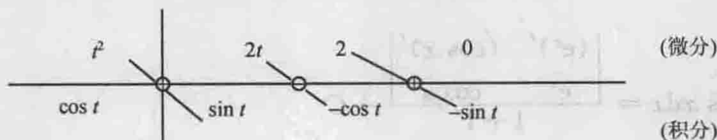
$=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$

所以

$$I=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$$

(4) 令 $\arcsin x=t$,则 $x=\sin t$,$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,用表格法求解.



$$I=\int t^2\cos t\mathrm{d}t=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C$$
$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$

例 10 求下列积分:

(1) $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解: (1) $I=-\dfrac{xe^x}{x+1}+\displaystyle\int\dfrac{1}{x+1}(e^x+xe^x)dx$

$$=-\frac{xe^x}{x+1}+\int e^x dx=-\frac{xe^x}{x+1}+e^x+C$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}d(1+x^2)=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$

$$I=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arctan x+C$$

●核心题型及思路启迪

3.3 不定积分中的概念

题型 24 与原函数相关的命题

思路启迪: 利用原函数、不定积分的定义和性质.

注: (1) 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数,则 $\int f(x)dx=F(x)+C$.

(2) 不定积分和原函数是两个不同的概念,前者是个集合,后者是该集合中的一个元素,所以 $\int f(x)dx\neq F(x)$.

(3) 一个函数的两个不同的原函数之间只差一个常数.

例 11 若函数 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$,则 $f(x)$ 的一个原函数为(　　).

(A) $1+\sin x$　　(B) $1-\sin x$　　(C) $1+\cos x$　　(D) $1-\cos x$

解: 因为 $f'(x)=\sin x$,所以 $f(x)=-\cos x+C$. 取 $f(x)=-\cos x$,于是

$$\int f(x)dx=\int(-\cos x)dx=-\sin x+C_1$$

令 $C_1=1$,则得 $f(x)$ 的一个原函数为 $1-\sin x$,故选(B).

另解: 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$,则 $F''(x)=\sin x$,对(A),(B),(C),(D)项逐一求二阶导数,只有 $(1-\sin x)''=\sin x$,故选(B).

例 12 设函数 $f(x)$ 连续且不等于零,若 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$,则 $\int\frac{1}{f(x)}dx=$(　　).

(A) $\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$　　(B) $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

(C) $-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$　　(D) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

解:

$$xf(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

所以

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

故选(D).

3.4 各种函数的不定积分

求不定积分的一般方法如下：

(1) 先试用凑微分法；

(2) 若凑微分法不行，再试用分部积分法，注意 u 的选取；

(3) 若前两种方法均不行，则用变量代换. 若被积函数中既含有对数函数，又含有反三角函数，则通常取 u 为反三角函数.

题型 25 求简单有理函数的不定积分

思路启迪: 有理函数的积分形式为 $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

(1) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为假分式，则用长除法

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}\quad(\text{整式}+\text{真分式})$$

$$=W(x)+\text{部分分式(或最简分式)}$$

(2) 求整式和部分分式的积分实际上是求如下四种形式的积分：

① $\int\frac{1}{x-a}\,dx=\ln|x-a|+C$；

② $\int\frac{1}{(x-a)^n}\,dx=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C\quad(n\neq1)$；

③ $$\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}dx$$

$$\xlongequal[\text{令}\frac{4q-p^2}{4}=a^2]{\text{令}x+\frac{p}{2}=u}\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\,du\text{；}$$

④ $\int\frac{x+a}{(x^2+px+q)^n}dx$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(a-\frac{p}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

其中 x^2+px+q 满足 $p^2-4q<0$，即 x^2+px+q 不能再分解成一次因式.

例 13　求下列积分：

(1) $\int\frac{5x^2+1}{(2x+3)^{100}}dx$；　(2) $\int\frac{x^{11}}{x^8-x^4-2}dx$.

解：(1) 令 $\frac{1}{2x+3}=t$，则 $x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-3\right)$，$dx=-\frac{1}{2t^2}dt$.

$$I=\int t^{100}\left[5\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-3\right)^2+1\right]\cdot\left(-\frac{1}{2t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{8}\int(5t^{96}-30t^{97}+45t^{98})\,dt$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\frac{5}{97}t^{97}-\frac{15}{49}t^{98}+\frac{45}{99}t^{99}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{8}\left[\frac{5}{97}\left(\frac{1}{2x+3}\right)^{97}-\frac{15}{49}\left(\frac{1}{2x+3}\right)^{98}+\frac{45}{99}\left(\frac{1}{2x+3}\right)^{99}\right]+C$$

(2) $I=\int\frac{x^8x^3}{x^8-x^4-2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^8}{x^8-x^4-2}dx^4=\frac{1}{4}\int\frac{u^2}{u^2-u-2}du\quad(u=x^4)$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{u+2}{u^2-u-2}\right)du$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{A}{u-2}+\frac{B}{u+1}\right)du$$

$\Rightarrow u+2=A(u+1)+B(u-2)$，令 $u=2\Rightarrow A=\frac{4}{3}$；$u=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$

则
$$I=\frac{1}{4}\left[u+\frac{4}{3}\ln|u-2|-\frac{1}{3}\ln(u+1)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4}\left[x^4+\frac{4}{3}\ln|x^4-2|-\frac{1}{3}\ln(x^4+1)\right]+C$$

例 14　求不定积分 $I=\int\frac{1}{x^6(1+x^6)}dx$.

解：$\frac{1}{x^6(1+x^6)}=\frac{1}{x^6}-\frac{1}{1+x^6}=\frac{1}{x^6}-\frac{(1+x^2)-x^2}{1+x^6}=\frac{1}{x^6}-\frac{1}{1-x^2+x^4}+\frac{x^2}{1+x^6}$

于是
$$I=\int\frac{1}{x^6(1+x^6)}dx=\int\left(\frac{1}{x^6}-\frac{1}{1-x^2+x^4}+\frac{x^2}{1+x^6}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{x^6}dx-\int\frac{1}{1-x^2+x^4}dx+\int\frac{x^2}{1+x^6}dx$$

而
$$\int\frac{1}{x^6}dx=-\frac{1}{5x^5}+C_1$$

$$\int\frac{1}{1-x^2+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{1-x^2+x^4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{1-x^2+x^4}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{1-x^2+x^4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right|+C_2$$

$$\int\frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+(x^3)^2}\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\arctan x^3+C_3$$

所以

$$I=\int\frac{1}{x^6(1+x^6)}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{2}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{3}\arctan x^3+C$$

其中 $C=C_1-C_2+C_3$.

题型 26 简单无理函数的不定积分

思路启迪：一般通过变量代换，去掉根号，化为有理函数的积分来计算. 常见的变换除了前面所介绍的四种变量代换外，还有

(1) $\int R(\sqrt{a-x},\sqrt{b-x})\,\mathrm{d}x$，令 $\sqrt{a-x}=\sqrt{b-a}\tan t$.

(2) $\int R(\sqrt{x-a},\sqrt{b-x})\,\mathrm{d}x$，令 $\sqrt{x-a}=\sqrt{b-a}\sin t$.

(3) $\int R(\sqrt{x-a},\sqrt{x-b})\,\mathrm{d}x$，令 $\sqrt{x-a}=\sqrt{b-a}\sec t$.

例 15 求下列积分：

(1) $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{x^5}{\sqrt{2x^3+5}}\mathrm{d}x$；　　(4) $I=\int\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

解：(1) 令 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6$，$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$.

$$I=\int\frac{1}{t^3+t^2}6t^5\mathrm{d}t=6\int\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$$

(2) $I=\int\sqrt{x(x+1)}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\mathrm{d}x$

$$=\int\sqrt{x}\,(x+1)\mathrm{d}x-\int[(x+1)-1]\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x+\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x+\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

(3) $I=\int \frac{x^3x^2}{\sqrt{2x^3+5}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{2x^3+5}}\,\mathrm{d}x^3=\frac{1}{12}\int \frac{2x^3+5-5}{\sqrt{2x^3+5}}\,\mathrm{d}(2x^3+5)$

$$=\frac{1}{12}\int \sqrt{2x^3+5}\,\mathrm{d}\,(2x^3+5)-\frac{5}{12}\int \frac{1}{\sqrt{2x^3+5}}\,\mathrm{d}(2x^3+5)$$

$$=\frac{1}{18}(2x^3+5)^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{6}\sqrt{2x^3+5}+C$$

(4) 先对被积函数的分母有理化：

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})(-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})^2-2}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+C$$

题型 27　三角有理式的积分

思路启迪： 由 $\sin x,\cos x$ 及常数，经过有限次的四则运算所得到的函数称为三角有理式，记为 $R(\sin x,\cos x)$. 求解 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的基本思路如下：

(1) 尽量使分母简单. 为此，分子、分母同乘以某个因子，将分母化成 $\sin^k x$ 或 $\cos^k x$ 的单项式，或将分母整个看成一项.

(2) 尽量使 $R(\sin x,\cos x)$ 的幂降低，为此，通常利用倍角公式或积化和差公式以达到目的.

1. "1"的妙用，$\sin^2\alpha x+\cos^2\alpha x=1$

例 16 求下列积分：

(1) $\int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解： (1) $\frac{1}{\sin x\cos^3 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos^3 x}=\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{\sin x}{\cos^3 x}=\frac{2}{\sin 2x}+\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

$$I=\int\frac{1}{\sin x\cos^3 x}\mathrm{d}x=\int\csc 2x\mathrm{d}(2x)-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^3 x}$$

$$=\ln|\csc 2x-\cot 2x|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C$$

(2) $I=\int\sqrt{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\quad\left(\text{或}\int\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\right)$$

$$=-2\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}+C\quad\left(\text{或 }2\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}+C\right)$$

2. 将分母化为单项式

情形 1: $\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{1+\sin x}\mathrm{d}x$ 或 $\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{1-\sin x}\mathrm{d}x$

方法：分子、分母同乘以 $1-\sin x$ 或 $1+\sin x$，将分母变为单项式处理.

情形 2: $\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

方法：分子、分母同乘以 $1-\cos x$ 或利用 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$，通常用后者.

情形 3: $\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{1-\cos x}\mathrm{d}x$

方法：分子、分母同乘以 $1+\cos x$ 或利用 $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$，通常用后者.

例 17 求下列积分：

(1) $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解：(1) $I=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int\tan^2 x\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x}-\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\cos x}-\tan x+x+C=\sec x-\tan x+x+C$$

(2) $I=\int\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}+C$$

(3) $I=\int\frac{1}{1+\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

（分母、分子若是关于正、余弦项的二次项，则一般分子、分母同除以余弦的平方）

3. 降幂法

常用的降幂公式如下。

(1) 积化和差公式

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x]$$

$$\cos\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x-\sin(\alpha-\beta)x]$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x]$$

(2) 倍角公式

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\qquad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

例 18 求下列不定积分.

(1) $\int\sin 4x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$.

解：(1) $\sin 4x\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)\cos 3x$

$$=\frac{1}{2}\sin 6x\cos 3x+\frac{1}{2}\sin 2x\cos 3x$$

$$=\frac{1}{4}\sin 9x+\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 5x-\frac{1}{4}\sin x$$

$$\text{故原式}=\frac{1}{4}\int(\sin 9x+\sin 5x+\sin 3x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{36}\cos 9x-\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x+C$$

(2) $\sin^2 x\cos^4 x=\frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2\cos^2 x=\frac{1}{4}\sin^2(2x)\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$

$$=\frac{1}{8}(1+\cos 2x)\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x)$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{32}\cos 6x$$

$$\text{故原式}=\int\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{32}\cos 6x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x+C$$

4. 变量代换法

(1) 若被积函数满足 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则可令 $\tan x=t$；

(2) 若被积函数满足 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可令 $\sin x=t$；

（3）若被积函数满足 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可令 $\cos x=t$.

例 19 求下列不定积分.

（1）$\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$；（2）$\displaystyle\int\frac{dx}{(2+\sin^2 x)\cos x}$；

（3）$\displaystyle\int\frac{5+4\cos x}{(2+\cos x)^2\sin x}dx$.

解：（1）令 $\tan x=t$，则 $\sec^2 x dx=dt$，于是

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{t}{1+t^3}\,dt=\frac{1}{3}\int\frac{(1+t)^2-(1-t+t^2)}{(1+t)(1-t+t^2)}\,dt\\&=\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t}\\&=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(t^2-t+1)'+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}dt-\frac{1}{3}\ln|1+t|\\&=\frac{1}{6}\ln|t^2-t+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{3}\ln|1+t|+C\\&=\frac{1}{6}\ln\frac{\tan^2 x-\tan x+1}{(1+\tan x)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}\right)+C\end{aligned}$$

（2）令 $\sin x=t$，则 $\cos x dx=dt$，于是

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{dt}{(2+t^2)(1-t^2)}=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-t^2}dt+\frac{1}{3}\int\frac{1}{2+t^2}dt\\&=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C\\&=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+\frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{2}}+C\end{aligned}$$

（3）令 $\cos x=t$，则 $-\sin x dx=dt$，于是

$$\begin{aligned}原式&=-\int\frac{5+4t}{(2+t)^2(1-t^2)}dt=-\int\frac{1}{1-t^2}dt-\int\frac{1}{(2+t)^2}dt\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+\frac{1}{2+t}+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+\frac{1}{2+\cos x}+C\end{aligned}$$

题型 28 分段函数的不定积分

思路启迪：（1）分别求各区间段的不定积分表达式.

（2）考查函数在分段点处的连续性. 如果连续，那么在包含该点的区间内有原函数存在，然后根据原函数的连续性定出积分常数 C；如果分段点是函数的第一类间断点，则在包含该点的区间内，不存在原函数，这时，函数的不定积分只能在不包含该点在内的每个分段区间内得到.

例 20 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$,求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解: 当 $x>0$ 时,$\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C_1$;当 $x<0$ 时,$\int f(x)\mathrm{d}x=\int 0\mathrm{d}x=C_2$.

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,所以其原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,又

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)=C_1=\lim_{x\to 0^-}C_2=C_2$$

令 $C_1=C_2=C$,于是

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C, & x\geqslant 0\\ C, & x<0\end{cases}$$

例 21 求 $\int\max(x^3,x^2,1)\mathrm{d}x$

解: 令
$$f(x)=\max(x^3,x^2,1)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 1\\ x^2, & x\leqslant -1\\ 1, & |x|<1\end{cases}$$

当 $x\geqslant 1$ 时 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+C_1$

当 $x\leqslant -1$ 时 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_2$

当 $|x|<1$ 时 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x+C_3$

由原函数的连续性,有

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)=\lim_{x\to 1^-}(x+C_3),\qquad \text{即}\frac{1}{4}+C_1=1+C_3 \tag{1}$$

又

$$\lim_{x\to -1^+}(x+C_3)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{3}x^3+C_2\right),\qquad \text{即 }1+C_3=\frac{1}{3}+C_2 \tag{2}$$

联立解式(1)、式(2)可得 $C_1=\frac{3}{4}+C_3$,$C_2=-\frac{2}{3}+C_3$. 令 $C_3=C$,故有

$$\int\max(x^3,x^2,1)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}+C, & x\leqslant -1\\ x+C, & -1<x<1\\ \frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}+C, & x\geqslant 1\end{cases}$$

例 22 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1\\ 2x^3, & x>1\end{cases}$,求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解: 由题可知,$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,故在 $(-\infty,+\infty)$ 内,$f(x)$ 不存在原函数;而 $x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点,所以 $f(x)$ 的不定积分只能分别在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内得到.

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & x<0\\ \dfrac{x^3}{3}+x+C_2, & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{x^4}{2}+C_3, & x>1\end{cases}$$

因为 $x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点,所以 $f(x)$ 的原函数在 $x=1$ 处连续,即

$$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^3}{3}+x+C_2\right)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^4}{2}+C_3\right)\Rightarrow\frac{4}{3}+C_2=\frac{1}{2}+C_3\Rightarrow C_3=\frac{5}{6}+C_2$$

故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & x<0\\ \dfrac{x^3}{3}+x+C_2, & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{x^4}{2}+\dfrac{5}{6}+C_2, & x>1\end{cases}$$

题型 29 含对数函数、反三角函数的不定积分

思路启迪: 用如下三步法能解决.

(1) 凑微分法:若对数函数、反三角函数的导数是另一部分的常数倍,则用凑微分法;

(2) 分部积分法:若对数函数、反三角函数的导数不是另一部分的常数倍,则设对数函数、反三角函数为 $u(x)$,而另一部分不通过作变量代换可得出积分,则用分部积分法;

(3) 变量代换法:如果另一部分需要通过变量代换才可积分,则直接将对数函数、反三角函数设成变量 t.

例 23 求下列积分:

(1) $\int\ln[(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}]\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}$;　(2) $\int\dfrac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int x^2\arccos x\mathrm{d}x$;　(4) $\int\dfrac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$;

(5) $\int\dfrac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$;　(6) $\int\dfrac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$.

解: (1) $I=\int\dfrac{(x+b)\ln(x+a)+(x+a)\ln(x+b)}{(x+a)(x+b)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\ln(x+a)}{x+a}\mathrm{d}x+\int\frac{\ln(x+b)}{x+b}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2(x+a)+\frac{1}{2}\ln^2(x+b)+C$$

(2) $\int\dfrac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int(1+2\arctan x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+2\arctan x)$

$$=\frac{1}{3}(1+2\arctan x)^{\frac{3}{2}}+C$$

(3) $\int x^2\arccos x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\int\frac{1}{3}x^3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}x^3\arccos x+\frac{1}{6}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{6}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(x^2)+\frac{1}{6}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arccos x+\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+C$$

(4) $\int\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$

(5) $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\arcsin x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\arcsin x}{x}+\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

而
$$\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=1/t}\int\frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$$

$$=\ln|t-\sqrt{t^2-1}|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$$

所以
$$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$$

(6) 令 $\arctan\sqrt{x-1}=t$,则

$$\sqrt{x-1}=\tan t,\qquad x=\tan^2 t+1=\sec^2 t$$

$$\mathrm{d}x=2\sec t\sec t\tan t\mathrm{d}t=2\sec^2 t\tan t\mathrm{d}t$$

所以
$$I=\int\frac{\tan t\cdot t}{\sec^2 t}\cdot 2\sec^2 t\tan t\mathrm{d}t=2\int\tan^2 t\cdot t\mathrm{d}t$$

$$=2\int(\sec^2 t-1)t\mathrm{d}t=2\int t\mathrm{d}\tan t-2\cdot\frac{1}{2}t^2+C$$

$$=2t\tan t-2\int\tan t\mathrm{d}t-t^2+C$$

$$=2t\tan t-2\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$=2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-2\ln|\sqrt{x}+\sqrt{x-1}|+C$$

题型 30　复合函数的不定积分

思路启迪:先求出函数表达式,然后再计算不定积分.

例 24　设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

解:先求出函数表达式,然后求不定积分.

由 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$,得 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$;

又由 $f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$,得$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$,$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

所以
$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+C$$

例 25 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解: 令 $\ln x=t$,则 $x=\mathrm{e}^t$,代入原方程得 $f(t)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$.

故
$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$$
$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\frac{1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}+C$$

例 26 求不定积分 $\int xf'(2x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 的原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$.

解:
$$\int xf'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int xf'(2x)\mathrm{d}(2x)$$
$$=\frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}x$$

因为 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的原函数,所以 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. 于是
$$f(2x)=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{4x^2}$$

故
$$\int xf'(2x)\mathrm{d}x=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{8x}-\frac{1}{4}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)$$
$$=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{8x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}+C$$
$$=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4x}\sin 2x+C$$

题型 31 计算隐函数的不定积分

思路启迪: 计算隐函数的不定积分时,先把该函数转化为参数方程的形式. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数,如能把它写成参数方程形式 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$,则 $\int y\mathrm{d}x=\int y(t)x'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$,由此可得 $\int y\mathrm{d}x=F[h(x)]+C$(其中 $t=h(x)$ 是 $x=x(t)$ 的反函数).

例 27 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 确定的隐函数,求不定积分 $\int\dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\dfrac{y}{x}$,则 $y=tx$,代入所给方程得
$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}\\[2mm]y=\dfrac{1}{t(1-t)}\end{cases}$$

于是

$$\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x = \int t^2(1-t)^2 \cdot \frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t = \int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 3t - 2\ln|t| + C = \frac{3y}{x} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + C$$

例 28　设 $y=y(x)$ 是由方程 $y(x-y)^2=x$ 确定的隐函数，求不定积分 $\int \frac{1}{x-3y}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=x-y$，则 $y=x-t$，代入所给方程得

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$$

于是

$$\int \frac{1}{x-3y}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\dfrac{t^3}{t^2-1}-\dfrac{3t}{t^2-1}} \cdot \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2-1| + C = \frac{1}{2}\ln|(x-y)^2-1| + C$$

第4章 定积分

●重要定理、公式和结论

4.1 定积分的基本性质

(1) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 是一个常数值，这个值只与被积函数及积分上、下限有关，而与用什么字母表示积分变量无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u\cdots$$

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x, \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(3) $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

(4) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$（也称对积分区间具有可加性，可推广到可列个）.

(5) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$k$ 为常数.

(6) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_k(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x \pm \cdots \pm \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$.

(7) 比较定理　设 $f(x)\leqslant g(x)$，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论： ① 若 $f(x)\geqslant 0$，对任意的 $x\in[a,b]$，有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$；

② $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

(8) 估值定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

(9) 积分中值定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一个 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$，$a\leqslant\xi\leqslant b$，也可写成 $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，此式称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值公式.

4.2 重要定理

定理 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对于任意的 $x\in[a,b]$，则变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

对 x 可导，且有 $F'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$.

推论：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $\varphi(x)$ 可导，$F(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ ，则

$$F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

定理 2　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

注：如果已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，有关命题证明过程中要作辅助函数，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)$ 是一个很好的辅助函数.

定理 3(牛顿-莱布尼茨公式)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

注：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，否则结论不一定正确. 例如，$\int_{-1}^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$ 是错误的.

4.3　重要公式

公式 1(对称区间的积分)　设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，则

$$\int_{-l}^l f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (f(x)\text{ 是奇函数})\\ 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x & (f(x)\text{ 是偶函数})\end{cases}$$

公式 2　设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，a 为任一实数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\mathrm{d}x$$

公式 3

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}$$

公式 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 & (n\text{ 是奇数})\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n\text{ 是偶数})\end{cases}$$

公式 5(三角函数族的正交性)

$$\int_0^{2\pi}\sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x=0$$

公式 6(定积分的分部积分法)

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导函数,则有分部积分公式:

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

公式 7(定积分的换元积分法)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,令 $x=\varphi(t)$,若 $\varphi(t)$ 满足条件:

(1) $\varphi'(t)$ 是连续的,且 $\varphi'(t)\neq 0$;

(2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$,当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变动时,x 在 $[a,b]$ 上变动,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

4.4 计算定积分的方法

4.4.1 利用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$,其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

例 1 计算 $I=\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

解:

$$I=2\int_1^4\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int_1^4\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^4=2\left(\arctan 2-\frac{\pi}{4}\right)$$

4.4.2 利用换元积分法计算定积分

例 2 求下列定积分:

(1) $\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$; (2) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解: (1) 令 $x=a\sin t$, $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,且 $x=0$, $t=0$; $x=a$, $t=\frac{\pi}{2}$,则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t\mathrm{d}t}{a\sin t+a\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$$

令 $u=\frac{\pi}{2}-t$,则

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\mathrm{d}(-u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t$$

故

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},\quad 即\ I=\frac{\pi}{4}$$

(2) 令 $x=\tan t$, $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$, $x=0$, $t=0$; $x=1$, $t=\frac{\pi}{4}$,则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$$

令 $u=\frac{\pi}{4}-t$，则 $dt=-du, t=0, u=\frac{\pi}{4}; t=\frac{\pi}{4}, u=0$. 于是

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right](-du)=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}[\ln 2-\ln(1+\tan t)]dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$$

于是 $$2I=\frac{\pi}{4}\ln 2,\quad \text{即 } I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

4.4.3 利用分部积分法计算定积分

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$$

例 3 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$；　(2) $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$.

解： (1) $$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{2-x}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$$

(2) $$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$$

$$=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big|_0^3-\int_0^3 x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\int_0^3\frac{x}{2\sqrt{x}(x+1)}dx$$

$$=\pi-\int_0^3\frac{(\sqrt{x})^2+1-1}{(\sqrt{x})^2+1}d\sqrt{x}=\pi-\int_0^3\left[1-\frac{1}{(\sqrt{x})^2+1}\right]d\sqrt{x}$$

$$=\pi-\sqrt{3}+\arctan\sqrt{x}\Big|_0^3=\pi-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

4.5 反常积分

1. 积分区间为无穷的积分(也称无穷积分)

(1) $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$，若右边极限存在，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，否则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散；

(2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，若右边极限存在，则 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，当且仅当右边的两个极限均存在时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则发散.

2. 无界函数的瑕积分

(1) 对于积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，若 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，则 $x=b$ 称为函数 $f(x)$ 的瑕点，$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$；若右边极限存在，则 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则发散.

(2) 对于积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则 $x=a$ 称为函数 $f(x)$ 的瑕点，$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$；若右边极限存在，则 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则发散.

(3) 设 $a<c<b$，$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，则 $x=c$ 称为函数 $f(x)$ 的瑕点，有

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\eta\to0^+}\int_{c+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

当且仅当右边两个极限均存在时，瑕积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则发散.

3. 反常积分的牛顿-莱布尼茨公式(基本上同定积分运算)

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

(1) $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty)-F(a)$，其中 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$；

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b)-F(-\infty)$，其中 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$；

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{c}+F(x)\Big|_{c}^{+\infty} = F(+\infty)-F(c)+F(c)-F(-\infty)$.

(2) $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b^-)-F(a)$

($x=b$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点，即 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，其中 $F(b^-)=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$)；

$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b)-F(a^+)$

($x=a$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点，即 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，其中 $F(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$)；

$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(c^+)+F(c^-)-F(a)$

(其中 $x=c$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点，即 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$).

注：当且仅当广义积分收敛时，常义积分在对称区间上的奇偶函数积分的性质才保留.

●核心题型及思路启迪

4.6 与定积分的定义和性质相关的命题

题型32 定积分的估值

思路启迪：定积分的估值问题是指确定常数 m,M，使 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$ 成立，其中 M 要尽可能小，m 要尽可能大，即 M,m 分别接近于 $f(x)$ 的上下确界. 方法如下：

(1) 求出 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上的最值，定出 $f(x)$ 的范围，或者用不等式放缩法写出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的界限；或者将前二者结合得出 $f(x)$ 的适当范围.

(2) 利用估值定理或比较定理对 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 进行估值.

例4 设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$.

(1) 当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，证明：$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

解：(1) 因为 $|\cos x|\geqslant 0$，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t$$

又因为 $|\cos x|$ 以 π 为周期，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=n\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2n$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=(n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2(n+1)$$

从而有 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$.

(2) 当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，由(1)得

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi}=\frac{2}{\pi}$$

所以，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

注：本题用到了周期为 T 的函数 $f(x)$ 的积分性质：$\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

例5 证明：(1) $\dfrac{1}{2}\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}\leqslant\dfrac{\pi}{6}\quad(n>2)$；

(2) $2\leqslant\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^4}\,dx\leqslant\frac{8}{3}$.

证: (1) 显然,当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时,有 $1\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(n>2)$,则

$$\frac{1}{2}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}$$

即

$$\frac{1}{2}\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx\leqslant\frac{\pi}{6}$$

(2) 令 $f(x)=\sqrt{1+x^4}$,$x\in[-1,1]$,则

$$f'(x)=\frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}=\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$,又 $f(-1)=f(1)=\sqrt{2}$,$f(0)=1$,所以 $1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{2}$.

上式两边对 x 在$[-1,1]$上积分,得不出右边要证的结果,故对 $f(x)$重新分析.显然

$$1\leqslant f(x)=\sqrt{1+x^4}\leqslant\sqrt{1+2x^2+x^4}=1+x^2$$

则

$$2=\int_{-1}^{1}dx\leqslant\int_{-1}^{1}f(x)dx\leqslant\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx=\frac{8}{3}$$

即

$$2\leqslant\int_{-1}^{1}f(x)dx\leqslant\frac{8}{3}$$

例 6 证明不等式:$\ln(n+1)\leqslant1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.

证:

$$\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

令 $f(x)=\frac{1}{x}$,显然 $f(x)$在$(1,n+1)$单调下降,于是

$$f(i+1)<f(i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\ln(n+1)<\int_1^2\frac{1}{1}dx+\int_2^3\frac{1}{2}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\ln n=\int_1^n\frac{1}{x}dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx$$

$$>\int_1^2\frac{1}{2}dx+\int_2^3\frac{1}{3}dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

综上,可得 $\ln(n+1)\leqslant1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.

题型 33 变限积分的求导问题

思路启迪: (1) 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,函数 $\varphi(x)$可导,$F(x)=\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt$,则

$$F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

推论：设函数 $\varphi(x),\psi(x)$ 可导，$G(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$，则

$G'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$

(2) 对含参数的函数 $F_1(x)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ 或 $F_2(x)=\int_a^{u(x)} g(x,t)\mathrm{d}t$ 求导时，先将 x 移出被积函数.

(3) 遇到定积分或变限积分中的被积式含 $f(\varphi(x))$ 的，一般用变量代换 $u=\varphi(x)$ 将 $f(\varphi(x))$ 变为 $f(u)$，同时要注意相应更换积分上下限.

例 7　设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

解：

$$F'(x)=f(\ln x)(\ln x)'-f\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

例 8　设 $f(x)$ 为连续函数，求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t$.

解：将 x 移出被积函数，令 $u=x+t$，则 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$，且 $t=1$ 时，$u=x+1$；$t=2$ 时，$u=x+2$，于是

$$\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t=\int_{x+1}^{x+2} f(u)\mathrm{d}u$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x+1}^{x+2} f(u)\mathrm{d}u=f(x+2)-f(x+1)$$

例 9　设 $f(u)$ 是连续函数，求 $F(x)=\int_{\sin x}^{x^2} xf(te^x)\mathrm{d}t$ 关于 x 的导数.

解：因为 $F(x)=\int_{\sin x}^{x^2} xf(te^x)\mathrm{d}t \xlongequal{u=te^x} xe^{-x}\int_{e^x\sin x}^{x^2e^x} f(u)\mathrm{d}u$，所以

$$\begin{aligned}F'(x)&=(xe^{-x})'\int_{e^x\sin x}^{x^2e^x} f(u)\mathrm{d}u+(xe^{-x})\left[\int_{e^x\sin x}^{x^2e^x} f(u)\mathrm{d}u\right]'\\&=(-x+1)e^{-x}\int_{e^x\sin x}^{x^2e^x} f(u)\mathrm{d}u+(xe^{-x})[f(x^2e^x)(x^2e^x)'-f(e^x\sin x)(e^x\sin x)']\\&=(-x+1)e^{-x}\int_{e^x\sin x}^{x^2e^x} f(u)\mathrm{d}u+(xe^{-x})[f(x^2e^x)(x^2+2x)e^x-f(e^x\sin x)(\sin x+\cos x)e^x]\\&=\int_{\sin x}^{x^2}(1-x)f(te^x)\mathrm{d}t+f(x^2e^x)(2x^2+x^3)-xf(e^x\sin x)(\sin x+\cos x)\end{aligned}$$

4.7　各种类型定积分的计算

题型 34　求分段函数的定积分

思路启迪：首先分析积分上下限是被积函数定义域中哪个区间段上的点，然后按段积分. 另外，若被积函数或被积函数的主要部分是复合函数，则先作变量代换，使之变为简单形式.

例 10 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1 \\ 2-x, & 1\leqslant x<2 \\ 0, & x<0 \text{ 或 } x\geqslant 2 \end{cases}$,求 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

解: (1) 当 $x<0$ 时, $F(x)=\int_0^x 0\mathrm{d}t=0$;

(2) 当 $0\leqslant x<1$ 时, $F(x)=\int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}$;

(3) 当 $1\leqslant x<2$ 时, $F(x)=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x=2x-\frac{x^2}{2}-1$;

(4) 当 $x\geqslant 2$ 时, $F(x)=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^2(2-t)\mathrm{d}t+\int_2^x 0\mathrm{d}t=1$.

综上,有

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x<1 \\ 2x-\frac{x^2}{2}-1, & 1\leqslant x<2 \\ 1, & x\geqslant 2 \end{cases}$$

例 11 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0 \\ \frac{1}{1+x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$,计算 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解: 令 $x-2=t$,则

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x+\ln(1+x)\Big|_0^1\\&=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\Big|_{-1}^0+\ln 2=-\ln\frac{1}{\mathrm{e}+1}=\ln(\mathrm{e}+1)\end{aligned}$$

题型 35 求含有绝对值符号的定积分

思路启迪: 令绝对值符号内的式子等于 0,得出被积函数 $f(x)$ 的若干零点,再据此把积分区间分成若干个子区间,各子区间上的被积函数的绝对值就可以去掉了(注意符号),然后按段积分.

例 12 求下列积分:

(1) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-5}^4|x^2-2x-3|\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

解: (1) 令 $\ln x=0\Rightarrow x=1$,则

$$I=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}\ln x\mathrm{d}x=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\mathrm{d}x+x\ln x\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)+e-(e-1)=2-\frac{2}{e}$$

(2) 令 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=-1,x=3$,则

$$I=\int_{-5}^{-1}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x+\int_{3}^{4}(x^2-2x-3)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{-5}^{-1}-\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{-1}^{3}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{3}^{4}$$

$$=\frac{199}{3}$$

(3) 因为 $0<x\leqslant1$,所以当 $a\leqslant0$ 时,有

$$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x=\int_0^1 x(x-a)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}$$

当 $0\leqslant a<1$ 时,令 $x-a=0\Rightarrow x=a$,则

$$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x=\int_0^a x(a-x)\mathrm{d}x+\int_a^1 x(x-a)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^3}{6}+\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6}=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

当 $a\geqslant1$ 时　$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x=\int_0^1 x(a-x)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}-\frac{1}{3}$

(4) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}-2$$

题型 36　求被积函数中含有变上限积分的定积分

思路启迪: (1) 利用定积分的分部积分法. 此时,变限积分选作求导对象,即令 $u(x)=$ 变限积分,另外的部分选作 $\mathrm{d}v$.

(2) 利用累次积分更换积分次序.

例 13　(1) 设 $f(x)=\int_0^{a-x}e^{y(2a-y)}\mathrm{d}y$,计算: $I=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

(2) 设 $f(x)=\int_{x-1}^{2}e^{-y^2}\mathrm{d}y$,计算: $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

解: (1) $I=\int_0^a\left(\int_0^{a-x}e^{y(2a-y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

$$=x\left(\int_0^{a-x}e^{y(2a-y)}\mathrm{d}y\right)\Big|_0^a+\int_0^a xe^{(a-x)(a+x)}\mathrm{d}x$$

$$=0+e^{a^2}\int_0^a xe^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}e^{a^2}\cdot e^{-x^2}\Big|_0^a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{a^2}$$

(2) $I=\int_1^3\left(\int_{x-1}^2 e^{-y^2}dy\right)dx=x\left(\int_{x-1}^2 e^{-y^2}dy\right)\Big|_1^3+\int_1^3 xe^{-(x-1)^2}dx=-\int_0^2 e^{-y^2}dy+I_1$

又 $I_1=\int_1^3 xe^{-(x-1)^2}dx\xlongequal{y=x-1}\int_0^2(y+1)e^{-y^2}dy=\int_0^2 ye^{-y^2}dy+\int_0^2 e^{-y^2}dy$

故 $$I=\int_0^2 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^2=-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$$

另解: $I=\int_1^3\left(\int_{x-1}^2 e^{-y^2}dy\right)dx=\int_0^2 e^{-y^2}dy\int_1^{y+1}dx=\int_0^2 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$

例 14 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续, $\int_0^1 f(x)dx=A$,计算: $I=\int_0^1\left(\int_x^1 f(x)f(y)dy\right)dx$.

解:
$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\left(\int_x^1 f(x)f(y)dy\right)dx=\int_0^1 f(x)\left(\int_x^1 f(y)dy\right)dx\\&=\int_0^1\left(\int_x^1 f(y)dy\right)d\left(\int_0^x f(t)dt\right)\\&=\int_0^x f(t)dt\int_x^1 f(y)dy\Big|_0^1+\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)f(x)dx\\&=0+\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)d\left(\int_0^x f(t)dt\right)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\Big|_0^1=\frac{A^2}{2}\end{aligned}$$

题型 37 求对称区间$[-l,l]$上的定积分

思路启迪: 凡遇到对称区间上的积分,首先要想到的是验证被积函数 $f(x)$的奇偶性:

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数,则积分为零,即 $I=\int_{-l}^l f(x)dx=0$;

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $I=2\int_0^l f(x)dx$;

(3) 若 $f(x)$ 非奇非偶,则作负变换:令 $x=-t$.

注: 在对称区间 $[-l,l]$ 的被积函数 $f(x)$ 若是非奇非偶函数,则可将其写成

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

因为 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数, $f(x)-f(-x)$ 是奇函数,所以

$$\begin{aligned}\int_{-l}^l f(x)dx&=\int_{-l}^l\left\{\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-l}^l[f(x)+f(-x)]dx+0\\&=\frac{1}{2}\int_{-l}^l[f(x)+f(-x)]dx\end{aligned}$$

例 15 计算 $\int_{-1}^1(\sqrt{1+x^2}+x)^2dx$.

解: $$原式=\int_{-1}^1(1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}+x^2)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}2x\sqrt{1+x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}(1+2x^2)\,dx$$

$$=0+2\int_{0}^{1}(1+2x^2)\,dx=2\left(x+\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{10}{3}$$

例 16　设 a,b 为正实数，$\int_a^b(x+c)\cos(x+c)\,dx=0$，试确定 c 的值.

解：

$$0=\int_a^b(x+c)\cos(x+c)\,dx\xlongequal{令u=x+c}\int_{a+c}^{b+c}u\cos u\,du$$

$u\cos u$ 为奇函数，要使 $\int_{a+c}^{b+c}u\cos u\,du=0$，则 $b+c=-(a+c)$，即 $c=-\frac{1}{2}(a+b)$.

例 17　设 $f(x)$在$[-a,a]$，$a\geqslant 0$ 上连续，计算

$$I=\int_{-a}^{a}[(x+e^{\cos x})f(x)+(x-e^{\cos x})f(-x)]\,dx$$

解：

$$I=\int_{-a}^{a}\{x[f(x)+f(-x)]+e^{\cos x}[f(x)-f(-x)]\}\,dx$$

$$=\int_{-a}^{a}x[f(x)+f(-x)]\,dx+\int_{-a}^{a}e^{\cos x}[f(x)-f(-x)]\,dx$$

$$=0+0=0$$

（因为 $x[f(x)+f(-x)]$和 $e^{\cos x}[f(x)-f(-x)]$都为奇函数）

例 18　设 $f(x)$，$g(x)$在$[-l,l]$上连续，$f(x)+f(-x)=A$，$g(x)$为偶函数.

（1）证明：$\int_{-l}^{l}f(x)g(x)\,dx=A\int_0^l g(x)\,dx$；

（2）利用(1)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x\,dx$.

证：(1) 因为不知 $f(x)g(x)$是奇函数还是偶函数，则令 $x=-t$，那么

$$I=\int_{-l}^{l}f(x)g(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[f(x)g(x)+f(-x)g(-x)]\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[f(x)g(x)+f(-x)g(x)]\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[f(x)+f(-x)]g(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}A\int_{-l}^{l}g(x)\,dx=A\int_0^l g(x)\,dx$$

故

$$\int_{-l}^{l}f(x)g(x)\,dx=A\int_0^l g(x)\,dx$$

(2) 取 $f(x)=\arctan e^x$，$g(x)=|\sin x|$，$l=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$，$g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续，且 $g(x)$为偶函数.

因为$(\arctan e^x+\arctan e^{-x})'=0$，所以 $\arctan e^x+\arctan e^{-x}=A$. 令 $x=0$，得 $A=\frac{\pi}{2}$，于是

$$f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$$

故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

题型 38 求周期函数的定积分

思路启迪： 利用定积分的性质：设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，a 为任一实数，则

(1) $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx$；

(2) $\int_0^{nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$.

例 19 求 $\int_{100}^{100+\pi}\sin^2(2x)(\tan x+1)dx$.

解： 因为 $\sin^2(2x)(\tan x+1)$ 以 π 为周期，所以

$$原式=\int_0^{\pi}\sin^2(2x)(\tan x+1)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2x)\tan x dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2x)dx$$

$$=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(4x)}{2}dx=\frac{\pi}{2}$$

例 20 设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(1) 证明对任意的实数 t，都有 $\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$.

(2) 证明 $G(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$ 是周期为 2 的周期函数.

分析： (1) 利用定积分区间的可加性证明；

(2) 利用(1)的结果和周期性定义.

解： (1) 对任意实数 t，都有

$$\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_t^0 f(x)dx+\int_2^{t+2}f(x)dx$$

而 $$\int_2^{t+2}f(x)dx\xlongequal{u=x-2}\int_0^t f(u+2)du=\int_0^t f(u)du=\int_0^t f(x)dx$$

从而 $$\int_t^0 f(x)dx+\int_0^t f(x)dx=0,\quad 故\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$$

(2) 由(1)可知，任意实数 t，都有 $\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$，记 $\int_0^2 f(s)ds=a$，则

$$G(x)=2\int_0^x f(t)dt-ax$$

对任意的 x，有

$$G(x+2)-G(x)=2\int_0^{x+2}f(t)dt-a(x+2)-2\int_0^x f(t)dt+ax$$

$$=2\int_x^{x+2}f(t)dt-2a=2\int_0^2 f(t)dt-2a=0$$

故 $G(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

题型 39 求被积函数的分母为两项,分子恰为其中一项的定积分

思路启迪:对形如 $\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}\mathrm{d}x$ 的积分,所作代换满足以下两点要求:

(1) 变换前后积分上下限不变,或者交换位置;

(2) 变换后,分母中的另一项代换了分子中的一项.

例 21 求下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}\mathrm{d}x$.

解:(1) $I \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{1+\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}(-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}x$,则

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

(2) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=2-u} \int_2^0 \frac{\sqrt{3-u}}{\sqrt{3-u}+\sqrt{u+1}}\mathrm{d}(-u) = \int_0^2 \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}\mathrm{d}x$,

则

$$2I = \int_0^2 1\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow I = 1$$

题型 40 求由三角有理式与初等函数通过四则运算、复合运算或变量代换所得式的定积分

思路启迪:这类题的一般解法是作变量代换. 常用的变量代换如下:

(1) 若积分限为$[0,\pi]$,则令 $t=\pi-x$;

(2) 若积分限为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则令 $t=\frac{\pi}{2}-x$;

(3) 若积分限为$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,则令 $t=\frac{\pi}{4}-x$;

(4) 若积分限关于原点对称,则令 $t=-x$.

例 22 求下列定积分:

(1) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$.

解:(1) $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi-u} \int_{\pi}^0 \frac{(\pi-u)\sin^3 u}{1+\cos^2 u}(-\mathrm{d}u)$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 u}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u - \int_0^{\pi} \frac{u\sin^3 u}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

于是 $$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-2\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}+\pi\cos x\Big|_0^{\pi}=\pi^2-2\pi$$

故
$$I=\frac{1}{2}(\pi^2-2\pi)$$

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{4}-u}\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right](-\mathrm{d}u)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln 2-\ln(1+\tan x)]\mathrm{d}x$$

于是
$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\ln 2,\quad 故\ I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

例 23 计算 $I=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$.

解:
$$I=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x\xlongequal{t=n\pi-x}\int_{n\pi}^0(n\pi-t)|\sin(n\pi-t)|(-\mathrm{d}t)$$

$$=\int_0^{n\pi}(n\pi-x)|\sin x|\mathrm{d}x$$

$$=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x-\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$$

故
$$I=\frac{n\pi}{2}\cdot n\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=n^2\pi$$

注: 本题用到了周期函数的积分性质
$$\int_0^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$$

例 24 求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

解: 积分区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 是对称区间，但被积函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数，于是令 $x=-t$，则

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x\xlongequal{令x=-t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}(-t)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x$$

于是
$$I=\frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x\quad(因为\ \sin^2 x\ 是偶函数)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

题型 41 定积分等式的证明

常用定理有: 连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分的性质、重要定理及换元积分法、分部积分法.

1. 只告知被积函数 $f(x)$ 连续的命题的证法

思路启迪：利用拉格朗日中值定理或其推论.

例 25 设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0$.

(1) 证明：对于 $\forall x\in[-l,l]$，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

证：(1) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t, F(0)=0$，则由拉格朗日中值定理，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$F(x)-F(0)=(x-0)F'(\theta x)$$

而
$$F'(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x)-f(-x)$$

故
$$F(x)=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

即
$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = x[f(\theta x)-f(-\theta x)] \tag{1}$$

(2)式(1)两边同除以 x^2 得

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{x[f(\theta x)-f(-\theta x)]}{x^2}$$

上式两边取 $x\to 0$ 时的极限，则

$$左边=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x)-f(0-x)}{2x}=f'(0)$$

$$右边=\lim_{x\to 0}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+\theta x)-f(0-\theta x)}{2\theta x}\cdot(2\theta)=f'(0)\lim_{x\to 0}(2\theta)$$

则
$$\lim_{x\to 0}(2\theta)=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

2. 由定积分所构成式子的证明

思路启迪：利用定积分的换元积分法，变量代换可按以下步骤进行：

(1) 将定积分等式一端的积分变量改写为 u，另一端仍为 x；

(2) 比较两端被积函数或其他主要部分的形式：

① 若一端为 $f(x)$，另一端为 $f(\varphi(u))$，则令 $x=\varphi(u)$；

② 若一端为 $f(x)$，另一端为 $f(u)$，则此时做的变量代换由两边积分的上下限来确定.

例 26 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

分析：比较 $f(\sin x)$，$f(\sin u)=f(\sin(\pi-u))$，令 $x=\pi-u$.

证：

$$I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi-u} \int_{\pi}^{0}(\pi-u)f(\sin(\pi-u))(-\mathrm{d}u)$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$$

于是

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x\right] \tag{1}$$

而 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal{t=\pi-x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\pi-t))(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，代入式(1)，得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

例 27 设 $f(x)$ 连续，计算 $I=\int_2^4 \frac{f(3+x)}{f(3+x)+f(9-x)}\mathrm{d}x$.

分析：为计算，要先证明

$$I=\int_2^4 \frac{f(3+x)}{f(3+x)+f(9-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_2^4 \frac{f(9-x)}{f(3+x)+f(9-x)}\mathrm{d}x=\int_2^4 \frac{f(9-u)}{f(3+u)+f(9-u)}\mathrm{d}u$$

比较：$\frac{f(3+x)}{f(3+x)+f(9-x)}=\frac{f(9-u)}{f(3+u)+f(9-u)}$，则 $3+x=9-u$，即 $u=6-x$.

证：

$$I=\int_2^4 \frac{f(3+x)}{f(3+x)+f(9-x)}\mathrm{d}x \xlongequal{u=6-x} \int_4^2 \frac{f(9-u)}{f(3+u)+f(9-u)}(-\mathrm{d}u)$$

$$=\int_2^4 \frac{f(9-u)}{f(3+u)+f(9-u)}\mathrm{d}u$$

于是 $2I=\int_2^4 \frac{f(3+x)+f(9-x)}{f(3+x)+f(9-x)}\mathrm{d}x=2$，即 $I=1$.

例 28 证明：$\int_0^x \mathrm{e}^{xt-t^2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t$.

分析：

$$\int_0^x \mathrm{e}^{xt-t^2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{x^2-t^2}{4}}\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{x^2-u^2}{4}}\mathrm{d}u$$

比较 e^{xt-t^2} 与 $\mathrm{e}^{\frac{x^2-u^2}{4}}$ 可知，应令 $xt-t^2=\frac{1}{4}(x^2-u^2)$，则 $4t^2-4xt+(x^2-u^2)=0$，进而

$$t=\frac{x+u}{2} \qquad 或 \qquad t=\frac{x-u}{2}$$

证：$\int_0^x \mathrm{e}^{xt-t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{t=\frac{x-u}{2}} \int_{x}^{-x} \mathrm{e}^{x(\frac{x-u}{2})-(\frac{x-u}{2})^2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{\frac{x^2-u^2}{4}}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t$.

例 29 证明：$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

分析：由于两个积分的被积式形式一致，因此，作变换只能从两端的积分限去考虑. 通过观察，应作代换：$x=\frac{1}{u}$.

证：令 $x=\frac{1}{u}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$，有

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

3. 被积函数中含有变限积分或函数的导数 $f'(x)$，$f''(x)$，…的命题的证明

思路启迪： 利用定积分的分部积分法. 一般讲，变限积分选作 $u(x)$，即作为求导对象，另一部分选作 $\mathrm{d}v$；含有 $f''(x)$，$f'(x)$，…的积分选 $\mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x$ 或 $f''(x)\mathrm{d}x$.

例 30　证明：$\int_0^a\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u = \int_0^a (a-u)f(u)\mathrm{d}u$.

证： $\int_0^a\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u = \int_0^a\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\Big|_0^a - \int_0^a uf(u)\mathrm{d}u$

$$= a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t - \int_0^a uf(u)\mathrm{d}u = \int_0^a (a-u)f(u)\mathrm{d}u$$

例 31　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续的导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x$$

证：

$$\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x = x(1-x)f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= 0 - \left[(1-2x)f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$= f(1)+f(0) - 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x$$

例 32　设 $f'(x)$ 连续，$F(x) = \int_0^x f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$，证明：

$$F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a)$$

证：

$$F(2a) - 2F(a) = \int_0^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t - 2\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$

因为

$$\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t = -f(t)f(2a-t)\Big|_a^{2a} + \int_a^{2a} f(2a-t)f'(t)\mathrm{d}t$$

$$= f^2(a) - f(0)f(2a) + \int_a^{2a} f(2a-t)f'(t)\mathrm{d}t$$

又因为

$$\int_a^{2a} f(2a-t)f'(t)\mathrm{d}t \xlongequal{2a-t=u} \int_a^0 f(u)f'(2a-u)(-\mathrm{d}u)$$

$$= \int_0^a f(u)f'(2a-u)\mathrm{d}u = \int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$

故

$$F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a)$$

4. 被积函数 $f(x)$ 具有二阶或二阶以上可导的命题

思路启迪：利用泰勒定理证明.

(1) 若欲证存在 $\xi\in[a,b]$，使得关于 ξ 的关系式成立，不必作辅助函数，证明过程中要用到最值定理与介值定理；

(2) 若欲证存在 $\xi\in(a,b)$，使得关于 ξ 的关系式成立，则必须作辅助函数，令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

例 33　设 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ $(a\geqslant 0)$ 上连续，且 $f(0)=0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in[-a,a]$，使得

$$f''(\xi)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

证：将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展成一阶泰勒公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2\quad(\eta\in(0,x))$$

等式两边对 x 在 $[-a,a]$ 上积分，得

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{f''(\eta)}{2}x^2\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\frac{f''(\eta)}{2}x^2\mathrm{d}x\tag{1}$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上一定有最大值 M 和最小值 m，使得 $m\leqslant f''(x)\leqslant M$，则 $m\leqslant f''(\eta)\leqslant M$，于是

$$\frac{m}{2}x^2\leqslant\frac{1}{2}f''(\eta)x^2\leqslant\frac{M}{2}x^2$$

不等式各项对 x 在 $[-a,a]$ 上积分得

$$\int_{-a}^{a}\frac{m}{2}x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}f''(\eta)x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}\frac{M}{2}x^2\mathrm{d}x$$

即 $\frac{m}{3}a^3\leqslant\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{3}a^3$，结合式(1)得

$$\frac{m}{3}a^3\leqslant\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{3}a^3$$

即 $m\leqslant\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$.

由介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[-a,a]$，使得 $f''(\xi)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

题型 42　定积分不等式的证明

思路启迪：常用定理有中值定理、定积分的性质、定积分分部积分法、换元积分法，尤其是函数单调增减性判别定理.

常用不等式如下：

(1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$；

(2) $a>0$ 时，$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$；

(3) 柯西不等式：设 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

1. 只告知被积函数 $f(x)$连续、单调，或只知 $f(x)$可导，而没有给出更多条件的命题

思路启迪： 一般利用辅助函数法.

辅助函数的作法如下：

将积分限 b(或数字)改写成 x，同时，也将式中的 b(或数字)改写成 x，移项使不等式一端为 0，另一端即为所求作的辅助函数 $F(x)$.

证明程序：(1) 作辅助函数 $F(x)$；

(2) 求 $F'(x)$，判别符号，从而得出 $F(x)$的单调性；

(3) 求出 $F(a)$，$F(b)$，或 $F_+(a)$，$F_-(b)$，其中至少有一个为零或已知符号；

(4) 由(2)、(3)即可得出命题的证明.

例 34　设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且单调增加，$a<0<b$，证明：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]$$

证： 令 $F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]$，则

$$\begin{aligned}F'(x) &= xf(x)-\frac{1}{2}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^x f(x)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{1}{2}\int_0^x [f(x)-f(t)]\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 单增})\end{aligned}$$

所以 $F(x)$单调增加，于是，当 $b>a$ 时，有 $F(b)\geqslant F(a)=0$，即

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]$$

例 35　设 $f(x)$，$g(x)$在$[a，b]$上连续，且满足

$$\begin{aligned}&\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\\ &\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}\qquad x\in[a，b)$$

证明： $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

证： 由于所给条件可写成

$$\begin{aligned}&\int_a^x [f(t)-g(t)]\mathrm{d}t \geqslant 0,\\ &\int_a^b [f(t)-g(t)]\mathrm{d}t = 0,\end{aligned}\qquad x\in[a,b)$$

结论可写成
$$\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\leqslant 0$$
于是令 $F(x)=f(x)-g(x)$, $G(x)=\int_a^x F(t)\mathrm{d}t$，由题设 $G(x)\geqslant 0$, $x\in[a,b]$, $G(a)=G(b)=0$, $G'(x)=F(x)$，从而
$$\int_a^b xF(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\mathrm{d}G(x)=xG(x)\Big|_a^b-\int_a^b G(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b G(x)\mathrm{d}x$$
由于 $G(x)\geqslant 0$, $x\in[a,b]$，故有 $-\int_a^b G(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$，即 $\int_a^b xF(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$. 故
$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$$

2. 题设中告知被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又知 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 或 $f(a)=f(b)=0$ 的命题

思路启迪： 利用拉格朗日中值定理或积分中值定理证明.

方法 1：(1) 写出含端点的拉格朗日中值定理
$$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi),\quad a<\xi<x$$
$$f(x)\xlongequal{f(b)=0}f(x)-f(b)=(x-b)f'(\eta),\quad x<\eta<b$$
$$f(x)\xlongequal{f(a)=f(b)=0}\begin{cases}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi), & a<\xi<x\\ f(x)-f(b)=(x-b)f'(\eta), & x<\eta<b\end{cases}$$
(2) 根据题意进行不等式的放缩；

(3) 用定积分的比较定理、估值定理或函数的绝对值不等式等定积分性质作分析处理.

例 36 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\leqslant M$, $f(a)=0$，证明：
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2$$
证： 由题设可知，对任意 $x\in[a,b]$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，于是有
$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\qquad \xi\in(a,x)$$
因为 $f'(x)\leqslant M$，所以 $f(x)\leqslant M(x-a)$. 由定积分比较定理，有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2$$
即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2$$

方法 2： 利用牛顿-莱布尼茨公式.

(1) 写出如下等式：
$$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\ ;$$
$$f(x)-f(\xi)=\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\ .$$
(2) 利用定积分比较定理、估值定理或绝对值不等式进行分析处理.

例 37　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$|f'(x)|\leqslant M$，证明：

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M$$

证：因为　$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi),\quad a<\xi<x$

所以 $|f(x)|=(x-a)|f'(\xi)|\leqslant(x-a)M$；同理，$|f(x)|\leqslant(b-x)M$. 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\mathrm{d}x\\&=\frac{M}{2}(x-a)^2\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}+\frac{M}{2}(b-x)^2\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b=\frac{(b-a)^2}{4}M\end{aligned}$$

例 38　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为零，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试证：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$|f'(\xi)|\geqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证：因为 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $|f'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，于是 $|f'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上有最大值，记为 $M=f'(\xi)$.

$$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\eta),\quad a<\eta<x$$

则可得 $|f(x)|=(x-a)|f'(\eta)|\leqslant(x-a)M$；同理，$|f(x)|\leqslant(b-x)M$. 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\mathrm{d}x\\&=\frac{M}{2}(x-a)^2\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}+\frac{M}{2}(b-x)^2\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b=\frac{(b-a)^2}{4}M\end{aligned}$$

$$M\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

即　$$|f'(\xi)|\geqslant\frac{1}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

3. 被积函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导，又知最高阶导数符号的命题

思路启迪：利用泰勒公式证明. 证题程序：直接将函数 $f(x)$ 展成泰勒公式，然后对余项进行放缩处理.

例 39　$f(x)$ 二阶可导，$f''(x)>0$，$u(t)$ 在 $[0,a]$，$a>0$ 上处处连续，证明：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)$$

解：令 $x_0=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$，将 $f(x)$ 在 x_0 处展开成一阶泰勒公式.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

因为 $f''(x)>0$，所以 $\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\geqslant 0$．于是 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$．令 $x=u(t)$，有

$$f[u(t)]\geqslant f(x_0)+f'(x_0)[u(t)-x_0]$$

上式两边对 t 在 $[0,a]$ 上积分，得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant\int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t+\int_0^a f'(x_0)[u(t)-x_0]\mathrm{d}t$$

$$=af(x_0)+f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t-ax_0\right]$$

而 $ax_0=a\cdot\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t=\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$，所以 $\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant af(x_0)$，即

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant af\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]$$

4.8 反常积分

题型 43 反常积分的计算及收敛

思路启迪： 计算步骤如下.

(1) 区别反常积分的类型(无穷积分、瑕积分或混合型)，对既有无穷积分又有瑕积分的混合型，一定要先进行分解，使单个积分为只有一个瑕点的瑕积分或只有一个积分限为无穷的无穷积分.

(2) 求出被积函数的原函数.

(3) 按定义或运算性质求出各反常积分的值.

(4) 求出第(3)步所得各值的代数和.

例 40 计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}\mathrm{d}x$.

解：

$$I=\frac{1}{e^2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{x-1}+e^{1-x}}\mathrm{d}x\xlongequal{x-1=u}\frac{1}{e^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^u+e^{-u}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{e^2}\int_0^{+\infty}\frac{e^u}{1+e^{2u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{e^2}\arctan e^u\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{e^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4e^2}$$

例 41 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解： 令 $x=\tan t$，则 $t=\arctan x$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\mathrm{d}t=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

例 42　设 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha x+|x|)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，讨论其敛散性，收敛时求其值.

解：

$$I=\int_{-\infty}^{0}(\alpha x-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}(\alpha x+x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=(\alpha-1)\int_{-\infty}^{0}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+(\alpha+1)\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

而 $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+C$，于是

$$I_1=(\alpha-1)\int_{-\infty}^{0}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(\alpha-1)(x+1)\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{-\infty}=\begin{cases}0 & (\alpha=1)\\ \infty & (\alpha\neq 1)\end{cases}$$

所以当 $\alpha\neq1$ 时，I_1 发散，从而 I 发散；当 $\alpha=1$ 时，

$$I_1=0,\qquad I_2=(\alpha+1)\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2(x+1)\mathrm{e}^{-x}\Big|_{+\infty}^{0}=2$$

所以 I_2 收敛. 从而 I 收敛，其和为 2.

例 43　计算 $I=\int_1^5\frac{1}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}\mathrm{d}x$.

解： 令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$，则 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to5^-}f(x)=\infty$. 所以 $x=1$，$x=5$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$I=\int_1^5\frac{1}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}\mathrm{d}x=\int_1^5\frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\arcsin\frac{x-3}{2}\Big|_1^5=\arcsin 1-\arcsin(-1)$$

$$=2\arcsin 1=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

例 44　计算 $I=\int_1^2\left[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$.

解： 令 $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}$. 显然 $x=1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$I=\lim_{a\to1^+}\int_a^2\left[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x=\lim_{a\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_a^2$$

$$=1-\frac{1}{\ln 2}-\lim_{a\to1^+}\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{\ln a}\right)=1-\frac{1}{\ln 2}-\lim_{a\to1^+}\frac{\ln a-a+1}{(a-1)\ln a}$$

$$=1-\frac{1}{\ln 2}-\lim_{a\to1^+}\frac{\frac{1}{a}-1}{\ln a+(a-1)\cdot\frac{1}{a}}=1-\frac{1}{\ln 2}-\lim_{a\to1^+}\frac{1-a}{a\ln a+(a-1)}$$

$$=1-\frac{1}{\ln 2}-\lim_{a\to1^+}\frac{-1}{\ln a+a\cdot\frac{1}{a}+1}=1-\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}$$

第5章　微分中值定理

●重要定理、公式和结论

5.1　闭区间上连续函数的性质

定理1(有界性)　设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界,即存在 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M, x\in[a,b]$.

定理2(最值定理)　设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上必能取得最大值和最小值,即存在 $\xi,\eta\in[a,b]$,使得 $M=f(\xi)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$, $m=f(\eta)=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$,即 $m\leqslant f(x)\leqslant M, x\in[a,b]$.

定理3(介值定理)　设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,μ 为介于 $f(a)$与 $f(b)$(或 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值 M 与最小值 m)之间的任一实数,则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ,使 $\mu=f(\xi)$(注意,ξ 可取端点值).

定理4(零值定理)　设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)$与 $f(b)$严格异号,即 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$(注意,ξ 不可取端点值).

5.2　微分中值定理

定理1(费尔马定理)　若函数 $f(x)$满足以下条件:

(1) 函数 $f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义,并且在此邻域内恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$或$f(x)\geqslant f(x_0)$;

(2) $f(x)$在 x_0 处可导,

则有 $f'(x_0)=0$.

定理2(罗尔定理)　若函数 $f(x)$满足以下条件:

(1) $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) $f(x)$在开区间(a,b)内可导;

(3) $f(a)=f(b)$,

则在(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=0$.

定理3(拉格朗日中值定理)　若函数 $f(x)$满足以下条件:

(1) $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) $f(x)$在开区间(a,b)内可导,

则在(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

或

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

或

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+\theta(b-a)],\quad 0<\theta<1$$

推论： 若 $f'(x)=0,x\in[a,b]$，则 $f(x)=C,x\in[a,b]$ （C是常数）.

定理 4(柯西中值定理) 设函数 $f(x),g(x)$满足以下条件：

(1) $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续；

(2) $f(x),g(x)$在(a,b)内可导，且 $g'(x)\neq 0$，

则在(a,b)内至少存在一个 ξ，使$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)},a<\xi<b$.

定理 5(泰勒公式) 设 $f(x)$在 x_0 的邻域内具有 $n+1$ 阶导数，x 为该邻域内异于 x_0 的任一点，则在(x,x_0)或(x_0,x)内至少存在一个 ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{1}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （拉氏型 n 阶泰勒余项）

或 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ （皮亚诺型 n 阶泰勒余项）

当 $x_0=0$ 时，式(1)成为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x) \tag{2}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 或 $R_n(x)=o(x^n)$

式(1)称为 n 阶泰勒公式，式(2)称为 n 阶麦克劳林公式.

● 核心题型及思路启迪

5.3 闭区间上连续函数的命题

题型 44 闭区间上连续函数命题的证明

思路启迪：方法 1(直接法) 先利用最值定理，$m\leqslant f(x)\leqslant M,x\in[a,b]$，$M,m$分别是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值、最小值，然后用介值定理证明.

适用于：在闭区间$[a,b]$上存在 ξ，使得关于 ξ 的关系式成立.

方法 2(间接法) 作辅助函数 $F(x)$；若作 $F(x)$的过程无积分运算，则验证 $F(x)$满足零值定理；若作 $F(x)$的过程有积分运算，则验证 $F(x)$满足罗尔定理.

适用于：在开区间(a,b)上存在 ξ，使得关于 ξ 的关系式成立.

辅助函数的作法：

(1) 将欲证结论中的 ξ 或 x_0 改写成 x，移项，使等式一端为零，另一端记作 $F^*(x)$；

(2) 令 $F(x)=F^*(x)$，验证 $F(x)$ 是否满足零值定理，若满足，则命题得证；若不满足，则改令

$$F'(x)=F^*(x)\Rightarrow F(x)=\int F^*(x)\mathrm{d}x+C \quad (令 C=0)$$

(3) 验证 $F(x)$ 是否满足罗尔定理，若满足，则定理得证；若不满足，则改令

$$F''(x)=F^*(x)\Rightarrow F(x) \quad (两次积分)$$

(4) 将 $F(x)$ 在指定点展成一阶泰勒公式，命题即可得证.

例 1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，$c_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$. 证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$.

分析： 因为涉及闭区间上的一个点，所以用方法 1.

证： 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m. 于是

$$m\leqslant f(x_1)\leqslant M,c_1>0,\Rightarrow c_1m\leqslant c_1f(x_1)\leqslant c_1M$$
$$m\leqslant f(x_2)\leqslant M,c_2>0,\Rightarrow c_2m\leqslant c_2f(x_2)\leqslant c_2M$$
$$\vdots$$
$$m\leqslant f(x_n)\leqslant M,c_n>0,\Rightarrow c_nm\leqslant c_nf(x_n)\leqslant c_nM$$
$$\Rightarrow(c_1+c_2+\cdots+c_n)m\leqslant c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)\leqslant(c_1+c_2+\cdots+c_n)M$$
$$\Rightarrow m\leqslant\frac{c_1f(x_1)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\leqslant M$$

则由介值定理可得，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$$

例 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b](a<b)$ 上连续，且 $f(x)>0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

分析： 题中是证明在开区间 (a,b) 上存在一点 ξ，使得关于 ξ 的关系式成立，则用方法 2. 另外，只证左边的“=”，这是因为定积分对区间的可加性：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

证： 将欲证等式中的 ξ 改为 x，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=0$，作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)=-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t<0\quad(\text{因为 } f(x)>0),\qquad F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$$

即 $F(a)\cdot F(b)<0$，所以由零值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，故下式成立，即

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

例 3　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x=g(x)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

分析：题中是证明在开区间 (a,b) 上存在一点 ξ，使得关于 ξ 的关系式成立，则用方法 2.

将欲证等式中的 ξ 改为 x，则

$$f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=g(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-g(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=0$$

作辅助函数 $F(x)=f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-g(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，$F(a)=-g(a)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，$F(b)=f(b)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$，零值定理不易验证，故改令

$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-g(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\\&=f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\left[\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\cdot\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\right]'\end{aligned}$$

证：令 $F(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\cdot\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 又

$$F(a)=\int_a^a g(t)\mathrm{d}t\cdot\int_b^a f(t)\mathrm{d}t=0,\qquad F(b)=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\cdot\int_b^b f(t)\mathrm{d}t=0$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理，故至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x=g(x)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

例 4　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f(\xi)=\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

证：题中是证明在开区间 (a,b) 上存在一点 ξ，使得关于 ξ 的关系式成立，则用方法 2.

记 $\varphi(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，但 $\varphi(0)\varphi(1)<0$ 不成立. 由于

$$\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\left[\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}\right]',\quad x\neq 0$$

所以作辅助函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

因为

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=f(0)=0=F(0)$$

所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F(1)=\frac{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}{1}=0=F(0)$$

故由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\xi f(\xi)=\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<-\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$．证明：至少存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f(\xi)+\xi=0$.

解：将欲证等式中的 ξ 改为 x，作辅助函数 $F(x)=f(x)+x$，于是有

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[f(x)+x]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}<0$$

所以由积分中值定理，存在 $a\in[0,1]$，使 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=(1-0)F(a)<0$，即 $F(a)<0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x}{x}=0+1=1$，所以由极限的保号性，存在 $b>a$，使 $\frac{F(b)}{b}>0$，即 $F(b)>0$.

因此，由零值定理可知，至少存在 $\xi\in(a,b)\subset(0,+\infty)$，使得

$$F(\xi)=0,\qquad 即\ f(\xi)+\xi=0$$

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$．证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0$.

分析：将欲证等式中的 ξ 改为 x，则 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$．令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

证：令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$F(0)=0$，$F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，可知零值定理不易验证.

改令 $F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则由

$$\int_0^x F'(u)\mathrm{d}u=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

$$\Rightarrow F(u)\Big|_0^x=u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\Big|_0^x-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

$$\Rightarrow F(x)-F(0)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

得

$$F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且

$$F(0)=0,\qquad F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=0$$

即 $F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理,所以,至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=0$.

例 7　证明方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

分析: 由原方程可推出 $4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$. 令

$$f(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$$

$$f(0)=-(a+b+c),\qquad f(1)=3a+2b+c$$

显然零值定理不易验证.

改令 $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$,则

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$$

证: 作辅助函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$,显然 $f(x)$在$[0,1]$上可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=0$,则 $f(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理,所以至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=0$,即方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

5.4　中值定理的应用

题型 45　证明给出的函数 $f(x)$满足某中值定理

思路启迪: 验证定理的正确性,主要有两点:

(1) $f(x)$满足某中值定理的条件;

(2) 若条件满足,找出定理结论中的 ξ 值.

例 8　验证 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$ 在 $[0,2]$ 上满足拉格朗日中值定理,并求满足拉格朗日中值定理的 ξ 值.

证: (1) 显然$\dfrac{3-x^2}{2}$,$\dfrac{1}{x}$分别在$[0,1)$和$(1,2]$上连续,又

$$f_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{3-x^2}{2}=1=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=f_+(1)=f(1)$$

所以 $f(x)$在 $x=1$ 处连续,因此 $f(x)$在$[0,2]$上连续.

(2) 当 $x<1$ 时,$f'(x)=\left(\dfrac{3-x^2}{2}\right)'=-x$;当 $x>1$ 时,$f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x^2}{2(x-1)}=-1$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-1$$

所以 $f'(1)=-1$,即 $f(x)$在 $x=1$ 处可导,因此 $f(x)$在$(0,2)$内可导,且

$$f'(x)=\begin{cases}-x, & 0<x\leqslant 1\\ -\dfrac{1}{x^2}, & 1<x<2\end{cases}$$

由(1),(2)可知,$f(x)$在$[0,2]$上满足拉格朗日中值定理的条件,因而存在 $\xi\in(0,2)$,使

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(\xi),\quad 即\ f'(\xi)=-\frac{1}{2}$$

当 $0<\xi\leqslant 1$ 时

$$f'(\xi)=-\xi=-\frac{1}{2}\Rightarrow\xi=\frac{1}{2}$$

当 $1<\xi<2$ 时

$$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\xi=\sqrt{2}$$

故满足拉格朗日中值定理的 ξ 为 $\frac{1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

题型 46 证明某个函数恒等于一个常数的命题

思路启迪： 利用拉格朗日中值定理的推论，即若 $f'(x)=0, x\in[a,b]$，则 $f(x)=C, x\in[a,b]$ （C 是常数）.

例 9 证明：$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$（当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时）.

证： 令 $f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$，则

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}\tag{1}$$

因为 $|x|<\frac{1}{2}$，所以 $0<1-4x^2\leqslant 1$，则由式(1)可推得

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

所以 $f(x)=C$. 令 $x=0\Rightarrow C=\pi$，故

$$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi,\quad |x|<\frac{1}{2}$$

例 10 设 $f(x)$ 可导，$f(0)=0$，$f(a)=b$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数. 证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=ab$$

分析： 因为 $b=f(a)$，则结论等价为

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{f(a)} g(x)\mathrm{d}x=af(a)$$

证： 将上式中的 a 改为 x，则令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t-xf(x)$$

$$F'(x)=f(x)+g(f(x))f'(x)-f(x)-xf'(x)=xf'(x)-xf'(x)=0$$

则 $F(x)=C$. 令 $x=0\Rightarrow C=0$（因为 $f(0)=0$），则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t-xf(x)=0$. 将 $x=a$ 代入上式得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=ab$$

题型 47　命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明

思路启迪：方法 1　验证 ξ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的最值或极值点，利用极值存在的必要条件或费尔马定理可得证.

方法 2　验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在包含 $x=\xi$ 于其内的区间上满足罗尔定理条件.

方法 3　利用泰勒公式.

例 11　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$. 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

证： 不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)<0$，于是

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

由极限保号性可知，存在一个 $\delta_1>0$. 当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，恒有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow f(x)>f(a) \tag{1}$$

同理，有

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$$

由极限保号性可知，存在一个 $\delta_2>0$，当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时，恒有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow f(x)>f(b) \tag{2}$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最大值. 由式(1)、式(2)可知，最大值只能在 (a,b) 内取得.

令 $\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，又 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 处可导，故由费尔马定理可知，$f'(\xi)=0$.

例 12　设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，又 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$. 证明：存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证： 由题设可知，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$m,M$ 分别是 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值和最大值，于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,\qquad m\leqslant f(1)\leqslant M,\qquad m\leqslant f(2)\leqslant M$$

则

$$3m\leqslant f(0)+f(1)+f(2)\leqslant 3M\Rightarrow m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M$$

由介值定理可知，存在一点 $\eta\in[0,2]$，使得 $f(\eta)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$；又 $f(3)=1$，可知，$f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上满足罗尔定理，故存在一点 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

例 13　设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=f(1)$，$f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x$. 证明：存在一点 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

证： 因为 $f(0)=f(1)$，可知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理，于是存在一点 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=0$.

又$f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x=2\left(\frac{3}{2}-1\right)f(\eta)=f(\eta)$ （积分中值定理）$\left(\eta\in\left(1,\frac{3}{2}\right)\right)$

由上式可知，$f(x)$ 在 $[\eta,2]$ 上满足罗尔定理，于是存在一点 $\xi_2\in(1,2)$，使得 $f'(\xi_2)=0$. 由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，$f'(x)$ 在 $(0,2)$ 内可导，可知 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理，故存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

例 14 设函数 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证： 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且 $F(a)=F(b)=0$.

(1) 若 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 内同一点 c 取得最大值，则 $f(c)=g(c)\Rightarrow F(c)=0$，于是由罗尔定理可知，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$$

再利用罗尔定理可知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(2) 若 $f(x)$，$g(x)$在(a,b)内不同点 c_1，c_2 取得最大值，则 $f(c_1)=g(c_2)=M$，于是

$$F(c_1)=f(c_1)-g(c_1)>0,\qquad F(c_2)=f(c_2)-g(c_2)<0$$

于是由零值定理可知，存在 $c_3\in(c_1,c_2)$，使得 $F(c_3)=0$.

由罗尔定理可知，存在 $\xi_1\in(a,c_3)$，$\xi_2\in(c_3,b)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$$

再利用罗尔定理可知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

题型 48 欲证结论：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k\neq 0)$或由 $a,b,f(a),f(b),\xi,f(\xi),f'(\xi),\cdots,f^{(n)}(\xi)$所构成的代数式成立

思路启迪： (1) 作辅助函数 $F(x)$；

(2) 验证 $F(x)$ 满足罗尔定理.

辅助函数 $F(x)$的作法如下.

1. 原函数法（也称微分方程法）

具体步骤如下：

(1) 将欲证结论中的 ξ 改成 x；

(2) 将式子写成容易去掉一次导数符号的形式（即容易积分的形式）；

(3) 去掉一次导数符号（即作一次积分），移项，使等式一端为“0”，另一端即为新作辅助函数 $F(x)$（为简便，积分常数取“0”）.

对于拉格朗日中值定理：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

两边积分得 $f(x)+C=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，令 $C=0$，并移项得

$$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x=0$$

则辅助函数为 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

对于柯西中值定理：

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\xrightarrow{令\xi=x}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Rightarrow f'(x)$$
$$=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

两边积分得 $f(x)+C=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$，令 $C=0$，并移项得

$$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)=0$$

则辅助函数为 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$.

2. 常数 k 值法

此法适用于常数部分可分离出的命题. 构造辅助函数的步骤如下：

(1) 令常数部分为 k.

(2) 作恒等变形，使上述等式一端为 a 及 $f(a)$ 构成的代数式，另一端为 b 及 $f(b)$ 构成的代数式.

(3) 分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式. 若是，只要把 a(或 b)改成 x，相应的函数值 $f(a)$(或 $f(b)$)改成 $f(x)$，则代换变量后的端点表达式就是所求的辅助函数 $F(x)$.

如：对于拉格朗日中值定理 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，令

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k\Rightarrow f(b)-f(a)-k(b-a)=0$$
$$\Rightarrow f(b)-kb=f(a)-ka$$

则令 $F(x)=f(x)-kx=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$(令一端常数值为 x).

例 15 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=0$，$a>0$. 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

分析：将欲证等式中的 ξ 改为 x，则

$$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)\Rightarrow f(x)=\frac{b-x}{a}f'(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{a}{b-x}$$

上式两边积分 $\Rightarrow \ln f(x)=-a\ln(b-x)+C\Rightarrow(b-x)^a f(x)=C$.

证：作辅助函数 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，则 $F(a)=0$，$F(b)=0$，于是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足

罗尔定理,所以存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

例 16 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导. 证明:存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

分析: 令 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=k \Rightarrow bf(b)-kb=af(a)-ka$ 为轮换对称式.

证: 令 $F(x)=xf(x)-kx=xf(x)-\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}x$,则

$$F(b)-F(a)=bf(b)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}b-af(a)+\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}a=0$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件,即存在一个 $\xi \in (a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

例 17 设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上二阶可导,且 $f(0)=f'(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. 试证:至少存在一点 $\xi \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,使得 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

分析: 欲证结论可写为

$$f''(\xi)(1-2\xi)-2f'(\xi)=f'(\xi)$$

令 $\xi=x$,则上式为

$$f''(x)(1-2x)-2f'(x)=f'(x)$$

即 $[f'(x)(1-2x)]'=f'(x)$. 两边积分得

$$f'(x)(1-2x)=f(x)+C$$

令 $C=0$,并移项得

$$f'(x)(1-2x)-f(x)=0$$

则令辅助函数为 $F(x)=f'(x)(1-2x)-f(x)$.

证: 作辅助函数 $F(x)=f'(x)(1-2x)-f(x)$. 显然, $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内可导,且

$$F(0)=f'(0)(1-0)-f(0)=0$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

所以 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上满足罗尔定理的条件,则至少存在一点 $\xi \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $f''(\xi)(1-2\xi)-3f'(\xi)=0$,亦即 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

例 18 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数,且 $f''(x)\neq 0$. 证明:

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$,存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

证:(1) 由拉格朗日中值定理,对于$(-1,1)$内的任一 $x\neq0$,存在$\theta(x)\in(0,1)$,使得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x) \tag{1}$$

又因为 $f''(x)$连续且 $f''(x)\neq0$,所以,在$(-1,1)$内,$f''(x)>0$(或 <0),即 $f'(x)$在$(-1,1)$内单调增加(或单调减少),于是,$\theta(x)$是唯一的.

(2) 再由拉格朗日中值定理,在 0 与 $\theta(x)x$ 之间存在ξ,使得

$$f'(\theta(x)x)=f'(0)+f''(\xi)\cdot\theta(x)x$$

代入式(1)中得

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+f''(\xi)\cdot\theta(x)\cdot x^2$$

于是

$$\theta(x)=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\cdot\frac{1}{f''(\xi)}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\theta(x)&=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\cdot\frac{1}{f''(\xi)}\right]\\&=\frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\\&=\frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}\quad\text{(洛必达法则)}\\&=\frac{1}{f''(0)}\cdot\frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

题型 49 欲证结论:在(a,b)内至少存在$\xi,\eta(\xi\neq\eta)$满足某个代数式

思路启迪:这类命题的证法 用两次拉格朗日中值定理;或者用一次拉格朗日中值定理,用一次柯西中值定理;或者用两次柯西中值定理.

证明中的辅助函数的作法不同于题型48,而是利用分离变量法,使等式一端只含有ξ的代数式,另一端只含有η的代数式,结合原函数法稍加分析ξ,η的代数式,即可看出该作什么样的辅助函数.

例 19 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,$f(a)=f(b)=1$. 证明:存在$\xi,\eta\in(a,b)$,使得$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

分析: $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1\Rightarrow e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}\Rightarrow[e^{x}f(x)]'_{x=\eta}=e^{\xi}$

证:(1) $F(x)=e^{x}f(x)$,则由拉格朗日中值定理,存在一个$\eta\in(a,b)$,使得

$$F'(\eta)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \tag{1}$$

即 $$e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=\frac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}\quad(\text{因为 } f(b)=f(a)=1)$$

(2) 又令 $\varphi(x)=e^{x}$,则由拉格朗日中值定理,存在一个$\xi\in(a,b)$,使得

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a},\qquad\text{即 } e^{\xi}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a} \tag{2}$$

由式(1)、式(2)可得 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$,即 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

例 20 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$f'(x)\neq0$,$b>a>0$. 证明:存在$\xi,\eta\in(a,b)$,使得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

分析： $$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}f'(\eta)=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{2\sqrt{\eta}}}$$

证： 令 $\varphi(x)=\sqrt{x}$，由题设 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varphi'(x)\neq 0(x\in[a,b])$ 满足柯西中值定理的条件，则存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\eta)}{\varphi'(\eta)}$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{2\sqrt{\eta}}}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=2\sqrt{\eta}f'(\eta)$$

$$\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2\sqrt{\eta}f'(\eta)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \tag{1}$$

又由拉格朗日中值定理可知，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{2}$$

所以由式(1)、式(2)得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\quad(\xi,\eta\in(a,b))$$

例 21 已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$．

证： (1) 令 $F(x)=f(x)+x-1$，即要证明 $F(x)=0$ 在$(0,1)$内有实根.

由于 $F(x)$在$[0,1]$上连续，且 $F(0)\cdot F(1)=[f(0)-1]f(1)=-1<0$，所以由零值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 利用(1)的结果，对 $f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上应用拉格朗日中值定理可知，存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi} \tag{1}$$

对 $f(x)$ 在 $[\xi,1]$ 上应用拉格朗日中值定理可知，存在 $\zeta\in(\xi,1)$，使得

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi} \tag{2}$$

于是，由式(1)、式(2)得 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$.

第 6 章　一元微积分的应用

●重要定理、公式和结论

6.1　重要定理和结论

1. 函数的单调性判别

定理 1 设函数 $f(x)$在$[a,b]$内可导,且恒有 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$),则 $f(x)$在(a,b)内单增(或单减),即为 $f(x)$"↗"或"↘".

注:个别点处$f'(x)=0$,不影响 $f(x)$的单调性.

2. 极值

定理 2(取极值的必要条件)　设 $f(x_0)$为 $f(x)$的极值,且 $f(x)$在 x_0 处可导,则 $f'(x_0)=0$.

定理 3(取极值的充分条件 1)　设 $f(x)$在 x_0 的邻域内可导(注意,在 x_0 处 $f'(x)$可能不存在,但 $f(x)$要连续),则

(1) 当 x 从左到右经过 x_0 时,$f'(x)$的符号由"负"变为"正",则 $f(x_0)$为 $f(x)$的极小值;

(2) 当 x 从左到右经过 x_0 时,$f'(x)$的符号由"正"变为"负",则 $f(x_0)$为 $f(x)$的极大值;

(3) 若 $f'(x)$在 x_0 的两侧不变符号,则 $f(x_0)$不是 $f(x)$的极值.

定理 4(取极值的充分条件 2)　设 $f(x)$在 x_0 的邻域内二阶可导,且 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,则

(1) 当 $f''(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$为 $f(x)$的极小值;

(2) 当 $f''(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$为 $f(x)$的极大值.

3. 曲线的凹凸性

定理 5(凹凸性的判别定理)　设函数 $y=f(x)$在(a,b)内二阶可导,且恒有$f''(x)<0$(或$f''(x)>0$),则 $f(x)$在(a,b)内是凸的(或凹的).

定理 6(拐点的判别定理 1)　若在点 x_0 处有 $f''(x_0)=0$(或 $f''(x_0)$不存在,但 $f(x)$在 x_0 处连续),当 x 经过 x_0 时,$f''(x)$变号,则$(x_0,f(x_0))$为函数 $y=f(x)$图形的拐点.

定理 7(拐点的判别定理 2)　设函数 $f(x)$在 x_0 的某邻域内有三阶导数,且 $f''(x_0)=0$,$f'''(x_0)\neq 0$,则$(x_0,f(x_0))$为函数 $y=f(x)$图形的拐点.

●核心题型及思路启迪

6.2　导数的应用

题型 50　一元函数单调增减性的判别

思路启迪：(1) 函数的单调性要根据导函数的符号来判断，具体步骤如下：

① 先对函数 $f(x)$ 求导，求出驻点和不可导点；

② 以①中求出的点作为分界点，将定义域分割成若干区间；

③ 根据各个区间上的导函数符号判断函数的单调性，若导函数 $f'(x)>0$，则函数在该区间单调增加；若导函数 $f'(x)<0$，则函数在该区间单调减少；若导函数恒等于零，则函数在该区间为一常数.

(2) 利用函数的单调增减性证明不等式的程序如下：

① 先作辅助函数：移项，使不等式一端为“0”，另一端即为所作辅助函数 $f(x)$；

② 求 $f'(x)$，并验证 $f(x)$ 在指定区间的增减性；

③ 求出区间端点的函数值(或极限值或最值)，作比较即得所证.

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(0)=0$，在 $(0,a)$ 内 $f'(x)$ 单调增加，$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. 试证：$F(x)$ 在 $(0,a)$ 内也单调增加.

分析：当知道 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0$(或 $f(b)=0$)时，通常利用拉格朗日中值定理将 $f(x)$ 写成

$$f(x)=f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi)$$

或

$$f(x)=f(x)-f(b)=(x-b)f'(\xi)$$

其中 ξ 在 x 与 a(或 x 与 b)之间.

证：因为 $f(x)=f(x)-f(0)=xf'(\xi)$，$0<\xi<x$(当 $x>0$ 时)，又因 $f'(x)$ 单调增加，有 $f'(x)>f'(\xi)$(当 $x>\xi$ 时)，所以

$$F'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$=\frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}>0,\quad x\in(0,a)$$

故 $F(x)$ 在 $(0,a)$ 内也单调增加.

例 2 设 $f(x)=\int_1^x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：$f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，则结果如表 6-1 所列.

由表 6-1 可知，$f(x)$ 的单调减少区间为 $(0,1)$，$f(x)$ 的单调增加区间为 $(1,+\infty)$.

例 3 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$f(x)$ 的图形如图 6-1 所示，则其导函数的图形是图 6-2 中的哪一个？

表 6-1

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单减		单增

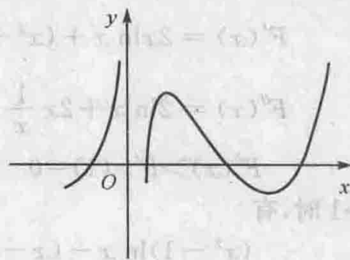
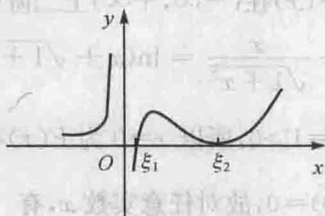
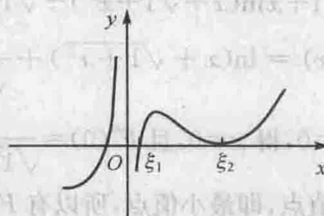


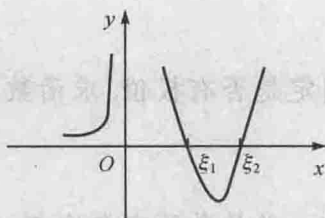
图 6-1



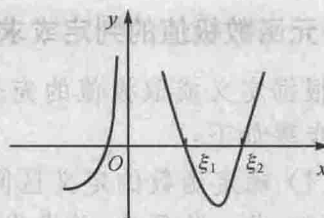
(a)



(b)



(c)



(d)

图 6-2

分析：对于根据函数图形判断导函数图形，或根据导函数图形判断函数图形的命题，一般找出特殊点（极值点、拐点、不可导点等）作为分界点，然后列表进行判断.

解：设两个极值点分别为 ξ_1,ξ_2，则 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 将点 $x=0,x=\xi_1,x=\xi_2$ 作为分界点，结果如表 6-2 所列.

表 6-2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\xi_1)$	ξ_1	(ξ_1,ξ_2)	ξ_2	$(\xi_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	单增		单增		单减		单增

由表 6-2 可知，应选图 6-2(c)所示图形.

例 4　证明：$x>1$ 时，$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$.

证：令 $F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，则 $F(x)$ 在$[1,+\infty)$上二阶可导，且

$$F'(x)=2x\ln x+(x^2-1)\frac{1}{x}-2(x-1)=2x\ln x-x-\frac{1}{x}+2$$

$$F''(x)=2\ln x+2x\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x^2}=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1>0$$

所以 $F'(x)>F'_+(1)=0\quad(x>1)$，$F(x)>F_+(1)=0\quad(x>1)$

故当 $x>1$ 时，有

$$(x^2-1)\ln x-(x-1)^2>0,\quad 即(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$$

例 5 **证明**：对任意实数 x，有 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$.

证：令 $F(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且

$$F'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

令 $F'(x)=0$，得 $x=0$，且 $F''(0)=\left.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0}=1>0$，所以 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内唯一的极小值点，即最小值点，所以有 $F(x)\geqslant F(0)=0$，故对任意实数 x，有

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$$

题型 51 一元函数极值的判定或求解

思路启迪：根据定义或取极值的充分条件判定是否有极值. 求函数极值的一般步骤如下：

(1) 确定函数的定义区间；

(2) 求一阶导数，并求出驻点及使一阶导数不存在的点；

(3) 根据取极值的充分条件逐一判定上述点是否为极值点，并求出极值.

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 可导，但 $f'(0)\neq 0$　　(B) 取得极大值

(C) 取得极小值　　(D) 不可导

解：因为没有告知 $f(x)$ 可导，所以要判别其极值只好用定义.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2\Leftrightarrow\frac{f(x)}{1-\cos x}=2+\alpha(x),\qquad 其中\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0$$

于是存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，有 $f(x)-f(0)=[2+\alpha(x)](1-\cos x)\geqslant 0$，即 $f(x)\geqslant f(0)$，故 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值，故应选(C).

例 7 设有方程 $3f(x)+4x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{x}=0$，求 $f(x)$ 的极值.

解：先求解 $f(x)$. 方程可变形为

$$3f(x)+4x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{7}{x}\tag{1}$$

令 $t=-\frac{1}{x}$，则 $x=-\frac{1}{t}$，将其代入式(1)得

$$3f\left(-\frac{1}{t}\right)+\frac{4}{t^2}f(t)=7t,\qquad 即\ 3t^2f\left(-\frac{1}{t}\right)+4f(t)=7t^3$$

于是

$$4f(x)+3x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)=7x^3 \tag{2}$$

联立方程(1)，(2)，得 $f(x)=\frac{3}{x}+4x^3$，$f(x)$在它的定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上二阶可导，且

$$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+12x^2,\qquad f''(x)=\frac{6}{x^3}+24x$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

由 $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$ 可知，$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4\sqrt{2}$ 为 $f(x)$的极小值；

由 $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$ 可知，$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-4\sqrt{2}$ 为 $f(x)$的极大值.

题型 52　求一元函数的最值及简单应用

思路启迪：求函数最值的一般步骤如下：

(1) 求函数的导数，求出驻点，并求出使导数不存在的点；

(2) 求出第(1)步所得各点的函数值和该函数定义域端点处的函数值；

(3) 比较以上各函数值的大小，最大者为最大值，最小者为最小值.

对实际问题，先根据题意建立函数表达式，若只有一个驻点，则该点处的函数值即为最值，不必判别.

例 8　在抛物线 $x^2=4y$ 上求一点，使它到 y 轴上的定点 $P(0,b)$的距离最短.

解：设该点为(x,y)，则

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}=\sqrt{4y+(y-b)^2}\quad (y\in[0,+\infty))$$

令 $f(y)=4y+(y-b)^2$，则 $f'(y)=4+2(y-b)$，$f''(y)=2$. 令 $f'(y)=0$，得 $y=b-2$.

(1) 当 $b\geqslant 2$ 时，$f'(y)=2[y-(b-2)]=\begin{cases}<0, & 0\leqslant y<b-2\\ =0, & y=b-2\\ >0, & y>b-2\end{cases}$，可知 $y=b-2$ 为 $f(y)$唯一的极小值点，此时 $f(b-2)$为 $f(y)$的最小值，从而

$$\min d=\sqrt{f(b-2)}=\sqrt{4(b-2)+(-2)^2}=2\sqrt{b-1}$$

(2) 当 $b<2$ 时，$f'(y)=4+2(y-b)=2[y-(b-2)]>0$，$f(y)$单调增加，于是 $y=0$ 为 $f(y)$的最小值点，从而 $f(y)$的最小值为

$$\min d = \sqrt{f(0)} = |b|$$

题型 53　曲线的拐点或凹凸区间的判定或求解

思路启迪：(1) 拐点的判定利用定义和拐点的判定定理. 拐点的判别方法如下：

① 若经过某一点时函数 $f(x)$ 的二阶导数变号，即若在点 x_0 处有 $f''(x_0)=0$(或 $f''(x_0)$ 不存在，但 $f(x)$ 在 x_0 处连续)，当 x 经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数的拐点；

② 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有三阶导数，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(2) 函数的凹凸区间根据定义、定理或函数图形判定. 一般解题程序如下：

① 在函数 $y=f(x)$ 的定义域内求 y', y''，令 $y''=0$，解出使 $y''=0$ 的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

② 列表，以上述得出的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为分界点，将 $y=f(x)$ 的定义域分割成若干区间，判断各区间中 y'' 的正负，若在某个区间上 $y''>0$，则该区间所对应的曲线为凹；若 $y''<0$，则该区间所对应的曲线为凸.

例 9　设 $\varphi(x)$ 为连续的正函数，令 $f(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t, a\geqslant 0$，判别 $f(x)$ 的图形在 $[-a,a]$ 上的凹凸性.

解：

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-a}^{a} |x-t| \varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-a}^{x}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{a}(t-x)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= x\int_{-a}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_{-a}^{x}t\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{a}t\varphi(t)\mathrm{d}t - x\int_{x}^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_{-a}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t + x\varphi(x) - x\varphi(x) - x\varphi(x) - \int_{x}^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t + x\varphi(x) \\ &= \int_{-a}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_{x}^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$f''(x) = \varphi(x) + \varphi(x) = 2\varphi(x) > 0 \quad \text{(因为 } \varphi(x) \text{ 是正函数)}$$

故 $f(x)$ 的图形在 $[-a,a]$ 上是凹的.

例 10　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y - x + y = 0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

解：方程 $y\ln y - x + y = 0$ 两边对 x 求导得

$$y'\ln y + y\frac{y'}{y} - 1 + y' = 0$$

即

$$y'(2+\ln y)=1 \tag{1}$$

上式两边再对 x 求导得

$$y''(2+\ln y)+\frac{(y')^2}{y}=0 \tag{2}$$

由式(1)得 $y'(1)=\frac{1}{2}$，将它代入式(2)得 $y''(1)=-\frac{1}{8}<0$，所以曲线 $y=y(x)$ 在点(1,1)附近是凸的.

例 11　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有三阶连续导数，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)-f(-x)$ 是 x 的三阶无穷小，则(　　).

(A) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的驻点　　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点，但不一定是拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点　　(D) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解： 由已知得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x^3}=a\neq 0$$

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+f'(-x)}{3x^2}=a\neq 0$$

所以有 $\lim\limits_{x\to 0}[f'(x)+f'(-x)]=2f'(0)=0\Rightarrow f'(0)=0$. 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+f'(-x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(-x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)+f'''(-x)}{6}=\frac{1}{3}f'''(0)=a\neq 0$$

不能确定 $f''(0)$ 是否为 0，故选(B).

例 12　已知点(2,4)是曲线 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 的拐点，且在点 $x=3$ 处取得极值，求 a,b,c 的值.

解： 由于点(2,4)是曲线的拐点，所以点(2,4)在曲线上，且 $y\Big|_{x=2}=4, y''\Big|_{x=2}=0$；又 $x=3$ 是函数的极值点，所以 $y'\Big|_{x=3}=0$，而 $y'=3x^2+2ax+b, y''=6x+2a$，故有

$$\begin{cases}8+4a+2b+c=4\\27+6a+b=0\\12+2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-6\\b=9\\c=2\end{cases}$$

注： 设 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值，$f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=0$.

题型 54　函数曲线的渐近线方程的计算与导数的判定

思路启迪： (1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，则 $y=b$ 为水平渐近线；

(2) 先找出使 $f(x)$ 无定义的点，然后判断 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$，则 $x=x_0$ 为垂直渐近线；

(3) 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，则 $y=ax+b$ 为斜渐近线.

注：函数曲线若有水平渐近线，则无斜渐近线，但是应分 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$两种情形.

例 13 求 $y=f(x)=\dfrac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\mathrm{acrtan}\,x}$的渐近线.

解：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\mathrm{acrtan}\,x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{(x^2-1)\cdot\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$ （利用抓大头准则）

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-3}{(x^2-1)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{2}{\pi}$$

所以 $y=\dfrac{2}{\pi}$，$y=-\dfrac{2}{\pi}$为 $y=f(x)$的水平渐近线.

(2) 显然，$x=\pm1$，$x=0$ 为无定义的点，又

$$\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=-3\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\arctan x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1}y=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x+1)\arctan x}=\frac{4\mathrm{e}}{2\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{8\mathrm{e}}{\pi}$$

$$\lim_{x\to-1}y=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x+1)\arctan x}=\infty$$

所以 $x=-1$，$x=0$ 是 $y=f(x)$的垂直渐近线.

(3) 因为函数在 $x\to\infty$时有水平渐近线，所以无斜渐近线.

例 14 求 $y=f(x)=\dfrac{3x^3-2x+1}{2x^2+3x-2}$的斜渐近线.

解：
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+1}{x(2x^2+3x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{2x^3}=\frac{3}{2}\quad\text{（利用抓大头准则）}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2x+1}{2x^2+3x-2}-\frac{3}{2}x\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(3x^3-2x+1)-3x(2x^2+3x-2)}{2(2x^2+3x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^2}{4x^2}=-\frac{9}{4}$$

所以 $y=f(x)$的斜渐近线为 $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{9}{4}$.

例 15 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$的渐近线的条数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=0$，所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线；

(2) $x=0$ 为函数的无定义点，且 $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$，所以 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线；

(3) 因为 $x\to-\infty$ 时有水平渐近线，则无斜渐近线，所以只求 $x\to+\infty$ 的情形.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=0$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线. 故选(D).

题型 55 与曲线曲率相关的命题

思路启迪： 利用曲率和曲率半径的计算公式：

(1) 曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 处的曲率为 $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(2) 对于参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$k=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$；

(3) 曲线在点 M 处的曲率 $k(k\neq 0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系：

$$\rho=\frac{1}{k}$$

(4) $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率圆为 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$，其中

$$\alpha=1-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad \beta=1+\frac{1+y'^2}{y''}$$

注： 函数在一点处的曲率圆与曲线在该点附近的凹凸性相同.

例 16 求曲线 $y=x\sin x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的曲率.

解： 因为 $y'=\sin x+x\cos x$，$y''=2\cos x-x\sin x$，所以

$$k\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{|2\cos x-x\sin x|}{[1+(\sin x+x\cos x)^2]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

例 17 设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geqslant 1)$ 处的曲率半径，$S=S(x)$ 是点 M 到原点的距离，求 $\frac{d\rho}{dS}$.

解： 由题设可知

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$\begin{cases}\rho=\rho(x)=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\\S=S(x)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x}\end{cases}$$

所以

$$\frac{d\rho}{dS}=\frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{dS}{dx}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\frac{1}{2}(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}(2x+1)}=\frac{6\sqrt{(4x+1)(x^2+x)}}{2x+1}$$

6.3 方程的根

题型 56 方程根的存在性问题

思路启迪： 证明方程在(a,b)内至少有一个实根的问题，通常转化为方程所对应的函数$f(x)$在(a,b)内至少有一个零值的问题，在开区间(a,b)内存在一个ξ，使得关于ξ的关系式成立. 证题程序如下.

(1) 写出方程对应的函数$f(x)$；

(2) 验证$f(x)$满足零值定理($f(x)$作的过程没有积分运算)，或者满足罗尔定理($f(x)$作的过程有积分运算).

例 18 试证明方程$4x^3+3x^2-6x+1=0$恰有三个实根.

证： 令$f(x)=4x^3+3x^2-6x+1$，则$f(x)$是连续函数，并且

$$f(-\infty)=-\infty,\qquad f(0)=1,\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}<0,\qquad f(+\infty)=+\infty$$

由连续函数零值定理可知，函数$f(x)$在$(-\infty,0)$，$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$各至少有一个零点，即方程$f(x)=0$在上述三个区间内至少有一个实根，所以方程$f(x)=0$实根的个数$n\geqslant 3$. 另一方面，该方程是三次方程，实根的个数$n\leqslant 3$，因此方程$f(x)=0$，即$4x^3+3x^2-6x+1=0$恰有三个实根.

注： 题中点$x=\frac{1}{2}$的选取方法如下：

令$f'(x)=12x^2+6x-6=6(2x^2+x-1)=6(2x-1)(x+1)=0$，可得$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-1$. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$，$f(-1)=6$. 而显然$f(0)=1>0$，所以就选了$x=\frac{1}{2}$.

例 19 试证方程$x=a\sin x+b$至少有一个正根，并且它不超过$a+b$，其中$a>0,b>0$.

证： 令$F(x)=x-a\sin x-b$，显然$F(x)$在$[0,a+b]$上连续，又

$$F(0)=-b<0$$

$$F(a+b)=(a+b)-a\sin(a+b)-b=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0$$

(1) 若$1-\sin(a+b)=0$，则$\xi=a+b$为方程的正根；

(2) 若$1-\sin(a+b)\neq 0$，则$F(a+b)>0\Rightarrow F(0)F(a+b)<0$，于是由零值定理可知，存在一个$\xi\in(0,a+b)$，使得$F(\xi)=0$，即

$$\xi-a\sin\xi-b=0,\qquad 0<\xi<a+b$$

亦即

$$\xi=a\sin\xi+b,\qquad 0<\xi<a+b$$

故方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

例 20 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$ 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根.

证：因为 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$.

当 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ 时，由极限保号性可知，存在一个 $\delta_1>0$，对 $x\in(a,a+\delta_1)$，有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，即

$$f(x)>f(a)=0 \quad (\text{因为 } x-a>0) \tag{1}$$

同理，当 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$ 时，由极限保号性可知，存在一个 $\delta_2>0$，对 $x\in(b-\delta_2,b)$，有 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$，即

$$f(x)<f(b)=0 \quad (\text{因为 } x-b<0) \tag{2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则由式(1)、式(2)可知，存在 $x_1\in(a,a+\delta)$，$x_2\in(b-\delta,b)$，使得

$$f(x_1)>0,\quad f(x_2)<0$$

显然 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，且 $f(x_1)f(x_2)<0$，故由零值定理可得，至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根.

题型 57 方程根的个数的研究

思路启迪：解题程序如下.

(1) 写出方程对应的函数 $f(x)$；

(2) 由 $f'(x)$ 求出 $f(x)$ 的单调区间、极值或最值；

(3) 分析极值或最值与 x 轴的相对位置，有时还要求区间端点的极限值.

例 21 判断方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 内实根的个数.

解：令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导. 由于

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\mid\sin x\mid\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\,\mathrm{d}x=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{2}$$

所以 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+2\sqrt{2}$. 于是 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$. $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，则 $f''(\mathrm{e})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}<0$，所以 $f(\mathrm{e})=2\sqrt{2}$ 是极大值. 结果如表 6-3 所列.

表 6-3

x	$(0,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	+		−
$f(x)$	单调上升	$f(\mathrm{e})=2\sqrt{2}$ 是极大值	单调下降

此外，由

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{x}{e}+2\sqrt{2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{x}{e}+2\sqrt{2}\right)=-\infty,\qquad f(e)=2\sqrt{2}$$

可知 $f(x)$在$(0,e)$，$(e,+\infty)$内各至少有一个零值；又 $f(x)$在$(0,e)$，$(e,+\infty)$内分别是单调的，所以 $f(x)$在$(0,e)$，$(e,+\infty)$内各至多有一个零值，故 $f(x)$在$(0,e)$，$(e,+\infty)$内各有且仅有一个零值，即方程在$(0,+\infty)$内有且仅有两个实根.

例 22 设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个实根，求常数 k 的取值范围.

解： 原方程等价于 $k+\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x}$. 令 $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+k$，则由题设可知函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内只有一个零点.

$$f'(x)=-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-3}{x^4}=\begin{cases}<0, & 0<x<\sqrt{3}\\ =0, & x=\sqrt{3}\\ >0, & x>\sqrt{3}\end{cases}$$

所以 $f(x)$在$(0,\sqrt{3})$内单调减少，在$(\sqrt{3},+\infty)$内单调增加. 并且由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$ 可知，$f(\sqrt{3})=k-\frac{2}{9}\sqrt{3}$（最小值）. 于是：

当 $k\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$在$(0,\sqrt{3})$内有唯一零点，在$(\sqrt{3},+\infty)$内无零点；

当 $0<k<\frac{2}{9}\sqrt{3}$时，函数 $f(x)$在$(0,\sqrt{3})$内有唯一零点，在$(\sqrt{3},+\infty)$内有唯一零点；

当 $k\geqslant\frac{2}{9}\sqrt{3}$时，函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内无零点；

当 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$时，$f(\sqrt{3})=0$，即此时 $x=\sqrt{3}$是函数 $f(x)$的唯一零点.

综上所述，当方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个实根时，$k\leqslant0$ 或 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

题型 58 方程根的唯一性问题

思路启迪： 证题程序如下.

(1) 写出方程对应的函数 $f(x)$；

(2) 验证 $f(x)$在与方程相同的区间内至多有一个零值(利用 $f(x)$的单调性证)；

(3) 按照 $f(x)$在与方程相同的区间内至少有一个零值，验证 $f(x)$或者满足零值定理($f(x)$作的过程没有积分运算)或者满足罗尔定理($f(x)$作的过程有积分运算).

例23 设$f(x)$在$[a,+\infty)$内连续,$f(a)<0$,在$[a,+\infty)$内,$f'(x)>k>0$,k为常数,证明方程$f(x)=0$在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内有且仅有一个实根.

证: (1) 证明至多有一个实根.

因为$f'(x)>k>0$,所以$f(x)$在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内是单调增加的,因而$f(x)$在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内至多有一个零值,即$f(x)=0$在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内至多有一个实根.

(2) 证明至少有一个实根.

由题设可知,$f(x)$在$\left[a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right]$内连续,在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内可导,则由拉格朗日中值定理可得,存在一点$\xi\in\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$,使得

$$f\left(a+\frac{|f(a)|}{k}\right)-f(a)=\frac{|f(a)|}{k}\cdot f'(\xi)>\frac{|f(a)|}{k}\cdot k=|f(a)|$$

即

$$f\left(a+\frac{|f(a)|}{k}\right)>f(a)+|f(a)|=0\quad(\text{因为}f(a)<0)$$

又$f(a)<0$,所以$f(x)$在$\left[a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right]$上满足零值定理,因此$f(x)$在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内至少有一个零值,即$f(x)=0$在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内至少有一个实根.

由(1)、(2)可知,$f(x)=0$在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内有且仅有一个实根.

例24 证明:$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1(n>1)$在$(0,1)$内必有唯一实根$x_n$,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解: 设$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$,则$f_n(0)=-1$,$f_n(1)=n-1>0$,且$f_n(x)$是连续函数.由零值定理可知,$f_n(x)$在$(0,1)$内有零点.

又$f'_n(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+1>0(x\in(0,1))$,即$f_n(x)$单调增加,所以$f_n(x)$在$(0,1)$内有唯一零点,即方程$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$在$(0,1)$内有唯一实根,记为$x_n$.于是有

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1=0\tag{1}$$

$$x_{n-1}^{n-1}+x_{n-1}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}-1=0\tag{2}$$

由式(1)、式(2)得

$$x_n^n+(x_n-x_{n-1})Q=0$$

其中,Q是x_n,x_{n-1}的函数,且$Q>0$,于是由$x_n^n>0$可知,$x_n-x_{n-1}<0$,即$x_n<x_{n-1}$.由此可知$\{x_n\}$单调减少且有下界,故有极限,记为a.

由式(1)可得$\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$,令$n\to\infty$,对它取极限,得$\frac{a}{1-a}=1$,解之得$a=\frac{1}{2}$.

6.4 定积分的应用

题型 59 利用微元法解题

思路启迪：利用微元法解题的条件如下.

条件 1：所求积分与自变量、自变量变化区间和自变量的函数三者有关；

条件 2：所求量具有可加性，将自变量变化区间各部分加起来，所求量也相应加起来.

若满足条件 1、条件 2，则可以用微元法.

利用微元法求解步骤如下：

(1) 先选择坐标系；

(2) 在变化区间中取一小的子区间；

(3) 在子区间利用函数、自变量和微分之间的关系建立所求量的微元；

(4) 对微元积分即得所求量.

例 25 求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转一周所得旋转体的体积.

解：如图 6-3 所示，选择 y 为积分变量，且 $0\leqslant y\leqslant 4$. 图中阴影部分绕 $x=3$ 旋转所成图形的体积为

$$dV=[\pi\,\overline{PM}^2-\pi\,\overline{QM}^2]dy$$

注意到 $x_1=-\sqrt{4-y}$，$x_2=\sqrt{4-y}$，则

$$dV=\pi[(3+\sqrt{4-y})^2-(3-\sqrt{4-y})^2]dy=12\pi\sqrt{4-y}\,dy$$

故 $V=\int_0^4 12\pi\sqrt{4-y}\,dy=64\pi$.

例 26 设半径为 R 的球体体密度 $\mu=r^2$，按以下情形分别求球体的质量.

(1) r 是球内任一点到球心的距离；

(2) r 是球内任一点到直径的距离；

(3) r 是球内任一点到过球心的平面的距离.

解：(1) 如图 6-4 所示，选极坐标系，积分变量选择 r，以极点 O 为中心，r 为内径，厚度为 dr 的球壳体积为

$$dV=4\pi r^2 dr$$

由于 dr 很小，球壳密度可看作是均匀的，为 $\mu=r^2$，于是其质量为

$$dM=4\pi r^2 dr\cdot r^2=4\pi r^4 dr$$

故

$$M=\int_0^R 4\pi r^4 dr=\frac{4}{5}\pi r^5\Big|_0^R=\frac{4}{5}\pi R^5$$

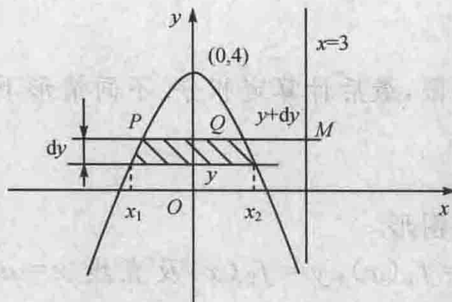


图 6-3

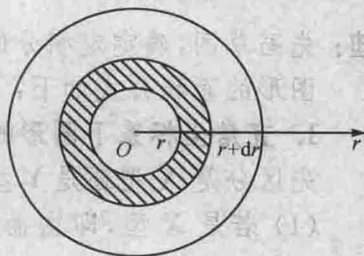


图 6-4

(2) 球体可以看作如图 6-5 所示的圆绕 y 轴旋转而成的旋转体,因此,直径可以理解为该圆位于 y 轴的直径. 故设 x 为积分变量,y 为中心轴,以 x 为内径、厚为 $\mathrm{d}x$ 的圆柱筒可看作图中阴影部分绕 y 轴所得的形体,其体积为

$$\mathrm{d}V = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \mu = x^2$$

故质量为 $\mathrm{d}M = 4\pi x^3\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$,因此

$$M = \int_0^R 4\pi x^3\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x = R\sin t} 4\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= -4\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)\cos^2 t\mathrm{d}(\cos t)$$

$$= -4\pi R^5\left(\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}\pi R^5$$

(3) 球体可以看作如图 6-6 所示的圆绕 z 轴旋转而成的旋转体.

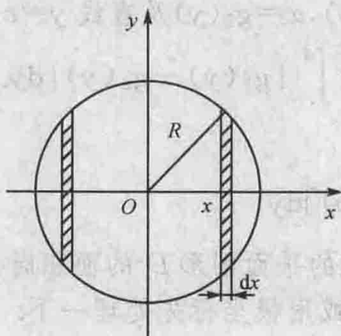


图 6-5

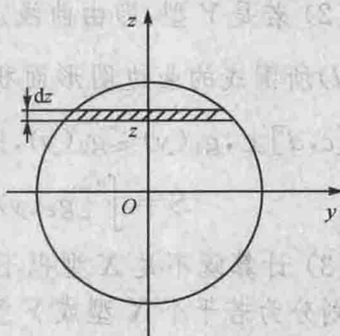


图 6-6

设 z 为积分变量,图 6-6 中所示为所讨论问题在 yOz 平面上的投影,球中从 z 到 $z+\mathrm{d}z$ 这部分球台的体积为 $\mathrm{d}V = \pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$,$\mu = z^2$,于是其质量为 $\mathrm{d}M = \pi z^2(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$,因此

$$M = \int_{-R}^{R} \pi z^2(R^2 - z^2)\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^R z^2(R^2 - z^2)\mathrm{d}z = 2\pi\left(\frac{1}{3}R^2 z^3 - \frac{1}{5}z^5\right)\Big|_0^R = \frac{4\pi}{15}R^5$$

题型 60 求平面图形的面积

思路启迪: 先画草图,确定定积分的上下限,最后计算定积分.不同情形下,平面图形的面积公式如下:

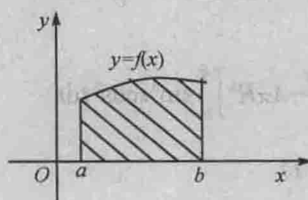
1. 直角坐标系下图形的面积

先区分是 X 型还是 Y 型平面图形.

(1) 若是 X 型,即由曲线 $y=f_1(x)$,$y=f_2(x)$ 及直线 $x=a$,$x=b$ $(a<b)$所围成的曲边图形面积为 $S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x$. 若在 $[a,b]$上,$f_1(x)\leqslant f_2(x)$,则

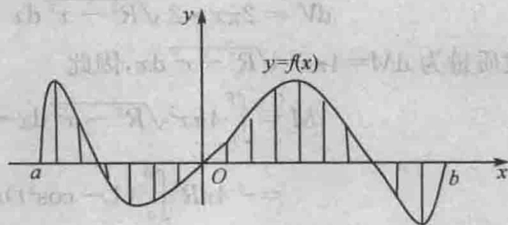
$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$$

图 6-7、图 6-8 为常见的两种情形.



$f(x)>0, S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

图 6-7



$S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$

图 6-8

(2) 若是 Y 型,即由曲线 $x=g_1(y)$,$x=g_2(y)$ 及直线 $y=c$,$y=d(c<d)$所围成的曲边图形面积为 $S=\int_c^d|g_1(y)-g_2(y)|\mathrm{d}y$. 若在区间 $[c,d]$上,$g_1(y)\leqslant g_2(y)$,则

$$S=\int_c^d[g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y$$

(3) 计算既不是 X 型也不是 Y 型的平面图形 D 的面积时,应先将 D 划分为若干个 X 型或 Y 型图形,或用极坐标先处理一下.

2. 极坐标系下平面图形的面积

(1) 由连续曲线 $\rho=\rho_1(\theta)$,$\rho=\rho_2(\theta)$($\rho_1(\theta)\leqslant\rho_2(\theta)$)与两条射线 $\theta=\alpha$,$\theta=\beta(\alpha<\beta)$所围成的图形面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

(2) 由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=a$,$\theta=\beta(\alpha<\beta)$所围成的曲边扇形面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$$

(3) 图形边界.

用参数$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$表示的平面图形的面积为

$$A=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\right|$$

例 27　计算由抛物线 $y=2x-x^2$ 和直线 $y=-x$ 所围平面图形的面积.

解：作草图，如图 6-9 所示.

解联立方程$\begin{cases}y=2x-x^2\\y=-x\end{cases}$，得两曲线交点为$(0,0)$，$(3,-3)$.

因为在区间$[0,3]$上，$-x\leqslant 2x-x^2$，故所求平面图形面积为

$$S=\int_0^3[2x-x^2-(-x)]\mathrm{d}x=\int_0^3(3x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$$

例 28　计算圆域 $x^2+y^2\leqslant 8$ 被抛物线 $y^2=2x$ 所分成的两部分的面积.

解：作草图，如图 6-10 所示.

解联立方程$\begin{cases}x^2+y^2=8\\y^2=2x\end{cases}$，得两曲线交点为$(2,-2)$，$(2,2)$.

先求右半部分的面积：在区间$[-2,2]$上，$\frac{y^2}{2}\leqslant\sqrt{8-y^2}$，所以

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{y}{2}\sqrt{8-y^2}+4\arcsin\frac{y}{2\sqrt{2}}-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{2}=2\pi+\frac{4}{3}$$

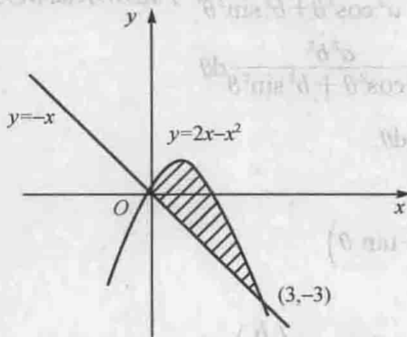


图 6-9

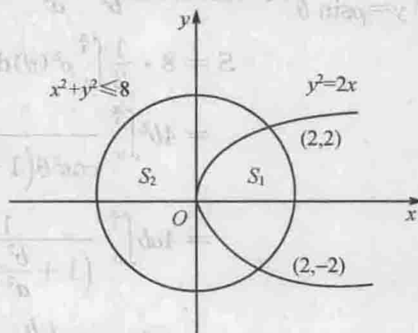


图 6-10

由于圆 $x^2+y^2=8$ 的面积为 $S=8\pi$，故左半部分的面积为

$$S_2=S-S_1=8\pi-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}$$

例 29　求由曲线 $y=\cos x$，$y=2\sin x$，$y=\sin x$ 所围成的图形的面积.

解：作草图，如图 6-11 所示.

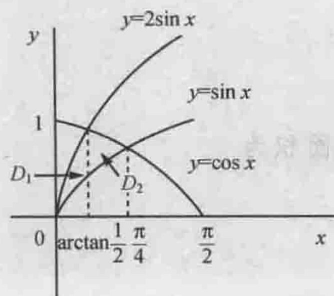


图 6-11

显然积分区域 D 既非 X 型也非 Y 型，现将 D 划分成 D_1 和 D_2 两块，如图 6-11 所示，通过计算可得曲线 $y=\cos x$ 与 $y=2\sin x, y=\sin x$ 交点的横坐标分别为 $\arctan\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}$，于是 D 的面积为

$$S=\int_0^{\arctan\frac{1}{2}}(2\sin x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=(-\cos x)\Big|_0^{\arctan\frac{1}{2}}+(\sin x+\cos x)\Big|_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{5}}+\sqrt{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=1+\sqrt{2}-\sqrt{5}$$

例 30　求摆线的一拱 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴所围的图形面积.

解：

$$S=\int_0^{2\pi}y(t)x'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t-2\cos t)\mathrm{d}t=3\pi a^2$$

例 31　求界于二椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$ 之间的图形面积.

解：由于图形的对称性，两椭圆的交点在直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 上，因此，所求面积 S 为在第一象限中由直线 $y=x$、x 轴及椭圆 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 所围图形面积的 8 倍. 为方便起见，将 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 化为极坐标方程.

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 中，得 $\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$. 于是所求面积为

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=4b^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\theta\left(1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)}\mathrm{d}\theta$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)}\mathrm{d}\left(\frac{b}{a}\tan\theta\right)$$

$$=4ab\arctan\left(\frac{b}{a}\tan\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4ab\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

题型 61　求旋转体的侧面积

思路启迪：(1) 若旋转体由 $y=f(x)\geqslant 0$ 和直线 $x=a, x=b$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转而成，则旋转曲面的侧面积为 $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$.

(2) 若旋转体由 $y=f_1(x)\geqslant 0, y=f_2(x)\geqslant 0, f_1(x)\leqslant f_2(x)$ 和直线 $x=a, x=b$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转而成，则旋转曲面的侧面积为

$$S = S_1 + S_2$$
$$= 2\pi\int_a^b f_1(x)\sqrt{1+f_1'^2(x)}\,\mathrm{d}x + 2\pi\int_a^b f_2(x)\sqrt{1+f_2'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

例 32　过原点作曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

解：作草图，如图 6-12 所示.

设切点为 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$，则过原点的切线方程为

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x$$

再将点 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$ 代入上式，解得

$$x_0 = 2, \qquad y_0 = \sqrt{x_0-1} = 1$$

所以切线方程为 $y=\frac{1}{2}x$.

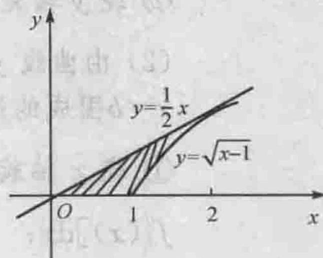


图 6-12

由曲线 $y=\sqrt{x-1}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积为

$$S_1 = \int_1^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

由直线段 $y=\frac{1}{2}x\,(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积为

$$S_2 = \int_0^2 2\pi\,\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{5}\pi$$

因此，所求旋转体的表面积为

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$$

例 33　求曲线 $\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=t-\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

解：$\begin{cases}x'=\sin t\\ y'=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，设 S_x 与 S_y 分别是曲线绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得到的旋转面的面积，则

$$S_x = 2\pi\int_0^{2\pi} y\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 16\pi^2$$

$$S_y = 2\pi\int_0^{2\pi} x\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{64}{3}\pi^2$$

题型 62　求已知截面面积的立体体积或旋转体体积

思路启迪：1. 已知平行截面面积的立体体积

已知截面积为 $s(x)$，区间为 $[a,b]$，则 $V=\int_a^b s(x)\mathrm{d}x$.

2. 旋转体的体积

(1) 由曲线 $y=f(x)>0$ 和直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴围成的图形

① 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$；

② 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

(2) 由曲线 $y=f_1(x),y=f_2(x)(0<f_1(x)\leqslant f_2(x))$ 和直线 $x=a$，$x=b$ 围成的图形

① 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为 $V_x=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]\mathrm{d}x$；

② 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为 $V_y=2\pi\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$.

例 34　求由圆柱面 $x^2+y^2=a^2,x^2+z^2=a^2$ 所围立体的体积.

解：由于对称性，故只要求第一象限的立体体积，过 $x(0\leqslant x\leqslant a)$ 点且垂直于 x 轴的平面与该立体的截面为边长为 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的正方形，则

$$s(x)=a^2-x^2$$

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=8\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=\frac{16}{3}a^3$$

例 35　一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心并与底面交成角 α，计算圆柱体被这平面截割下的那部分体积.

解：如图 6－13 所示，底圆方程为 $x^2+y^2=R^2$，在 x 处用垂直于 x 轴的平面截割形体所得截面为一直角三角形 ABC，其面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}y\tan\alpha\cdot y=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$$

故所求形体体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

例 36　过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一个平面图形，求此图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解：作草图，如图 6－14 所示.

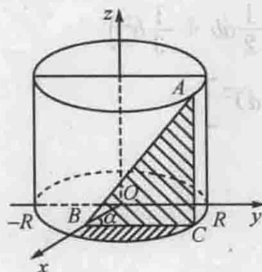


图 6 - 13

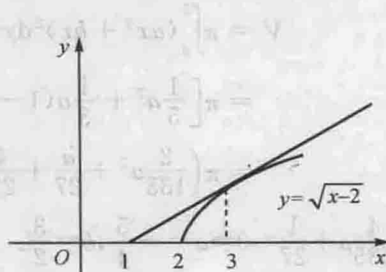


图 6 - 14

设所作切线与抛物线相切于点 $Q(x_0,y_0)$，切线 PQ 的斜率为

$$k=y'\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$$

切线 PQ 的方程为

$$y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)$$

因为 P 点在 PQ 上，所以

$$-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1-x_0)\Rightarrow x_0=3,\qquad k=\frac{1}{2}$$

于是切线方程为

$$y=\frac{1}{2}(x-1)$$

故所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^3\frac{1}{4}(x-1)^2\mathrm{d}x-\pi\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$$

例 37　求介于抛物线 $y=x^2$ 和 $y=\sqrt{x}$ 之间的区域绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

解： 作草图，如图 6 - 15 所示.

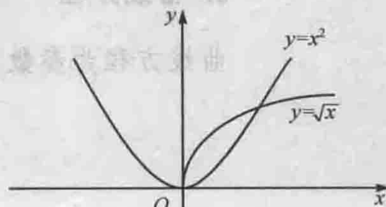


图 6 - 15

可求出交点为 $(0,0)$，$(1,1)$，且在区间 $[0,1]$ 上，$\sqrt{y}>y^2$，于是

$$V=\pi\int_0^1(y-y^4)\mathrm{d}y=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10}$$

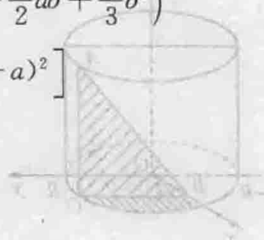
例 38　设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$. 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定常数 a,b,c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解： 因为抛物线过原点，所以 $c=0$. 又由题设可知

$$\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3},\qquad 即\ b=\frac{2}{3}(1-a)$$

且

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right)$$
$$=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{4}{27}(1-a)^2\right]$$
$$=\pi\left(\frac{2}{135}a^2+\frac{a}{27}+\frac{4}{27}\right)$$



令$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=0$，则$\frac{4}{135}a+\frac{1}{27}=0\Rightarrow a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$.

因为$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}}=\frac{4}{135}\pi>0$，所以，当$a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=0$时，体积$V$最小.

题型 63 求平面曲线的弧长

思路启迪： 不同情形下的曲线弧长的计算公式：

1. 直角坐标下

(1) 光滑曲线方程为 $y=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$ 的弧长为 $l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$；

(2) 光滑曲线方程为 $x=g(y)\ (c\leqslant y\leqslant d)$ 的弧长为 $l=\int_c^d\sqrt{1+g'^2(y)}\,\mathrm{d}y$.

2. 极坐标系下

曲线方程为$\rho=\rho(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$的弧长为$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

3. 曲线方程

曲线方程为参数式$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则其弧长为

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例 39 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$上相应于$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$的一段弧.

解：

$$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x-\frac{1}{2}$$
$$=\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}=\ln 3-\frac{1}{2}$$

例 40 求摆线$\begin{cases}x=1-\cos t\\y=t-\sin t\end{cases}$上相应于$0\leqslant t\leqslant 2\pi$的一拱.

解：

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1-\cos t)^2}\ dt = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\ dt = 8$$

例 41　求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长，常数 $a>0$.

解：

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)}\ d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin\theta)^2 + a^2(1+\cos\theta)^2}\ d\theta$$
$$= 2a\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 4a\int_0^{\pi} |\cos t|\ dt = 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 8a$$

题型 64　一元积分在物理上的应用

1. 求变力沿直线所做的功

思路启迪： 设某质点在变力作用下，沿 x 轴从点 a 运动到点 b，力的方向始终与 x 轴平行，变力表达函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则所求的功为 $W=\int_a^b f(x)dx$.

解题程序如下：

(1) 建立直角坐标系；

(2) 取一积分变量 x，找到微元 dW 与 x 之间的关系 $dW=f(x)dx$；

(3) 两边同时取积分得 $W=\int_a^b f(x)dx$.

例 42　一个圆柱形水池，底面半径为 5 m，水深为 10 m，要把池中的水全部抽出来，所做的功等于多少？（水的密度 $\rho=1\ kg/m^3$）

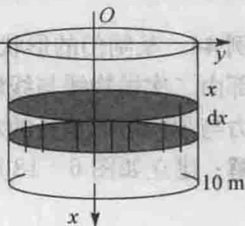


图 6-16

解： 建立如图 6-16 所示坐标系，将位于 x 处、厚度为 dx 的薄层水抽出来，其质量为

$$\Delta M = \text{密度} \times \text{体积} = \rho\cdot\pi\cdot 5^2 dx = 25\pi\rho dx$$

当薄层水的厚度 dx 很小时，所做的功元素 $dW=25\pi\rho g x dx$.

要把池中的水全部抽出来，所做的功为

$$W = \int_0^{10} 25\pi\rho g x\,dx = 25\pi\rho g \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{10} = (1\ 250\times 9.8\times 3.14\times 1)\ \text{kJ} = 38\ 465\ \text{kJ}$$

其中，g 为重力加速度。

例 43　某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数 $k>0$），汽锤第一次击打将桩打进地下 a m. 根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所做的功与前一次击打桩时所做的功之比为常数 $r(0<r<1)$，问：

(1) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

(2) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？

（注：m 表示长度单位米）

解:(1) 记 x_n 是第 n 次击打将桩打进地下的深度,W_n 是第 n 次击打所做的功,由题设,当桩被打进地下的深度为 x 时,土层对桩的阻力的大小为 kx,于是

$$x_1=a,\quad W_1=\int_0^{x_1}kx\,\mathrm{d}x=\int_0^a kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}ka^2$$

由于 $W_2=rW_1$,即 $\int_{x_1}^{x_2}kx\mathrm{d}x=r\cdot\frac{1}{2}ka^2$,所以 $x_2^2-a^2=ra^2$,即 $x_2=\sqrt{1+ra}$.

由于 $W_3=rW_2=r^2W_1$,即 $\int_{x_2}^{x_3}kx\mathrm{d}x=r^2\cdot\frac{1}{2}ka^2$,所以 $x_3=\sqrt{1+r+r^2}\,a$.

汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下 $\sqrt{1+r+r^2}\,a$ m.

(2) 设 $x_n=\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}\,a$,由于 $W_{n+1}=r^nW_1$,即 $\int_{x_n}^{x_{n+1}}kx\,\mathrm{d}x=r^n\cdot\frac{1}{2}ka^2$,所以

$$x_{n+1}=\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^n}\,a$$

从而由归纳法可得 $x_n=\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}\,a$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}\,a=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}a=\sqrt{\frac{1}{1-r}}a$$

即当击打次数不限时,汽锤至多能将桩打进地下 $\sqrt{\frac{1}{1-r}}a$ m.

2. 求静止液体的侧压力

思路启迪:设一平面板垂直地浸入密度为 ρ 的液体中,取 x 轴垂直向下,液面与 y 轴重合,此时平面板四周的曲线方程为 $y=f_1(x)$,$y=f_2(x)$ $(f_1(x)\leqslant f_2(x))$ 及 $x=a$,$x=b(a<b)$,则平面板一侧所受压力为 $F=\rho\int_a^b x[f_1(x)-f_2(x)]\mathrm{d}x$.

例 44 某闸门的形状与大小如图 6-17 所示,其中直线 l 为对称轴,闸门的上部为矩形 $ABCD$,下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时,欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4,闸门矩形部分的高 h 应为多少米?

解:建立如图 6-18 所示坐标系,则抛物线的方程为 $y=x^2$,闸门矩形部分承受的水压力为

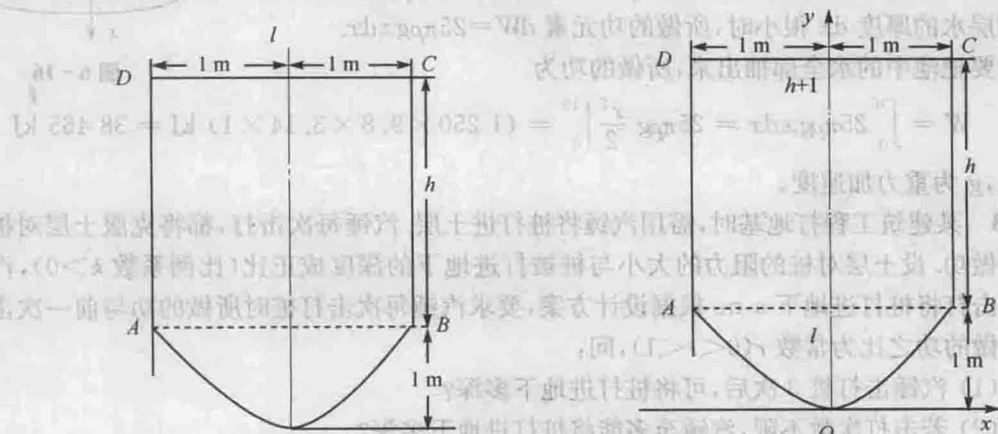


图 6-17　　图 6-18

$$p_1 = 2\int_1^{h+1} \rho g(h+1-y)\mathrm{d}y = 2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]\Big|_1^{h+1} = \rho g h^2$$

其中，ρ 为水的密度，g 为重力加速度，闸门下部承受的水压力为

$$p_2 = 2\int_0^1 \rho g(h+1-y)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = 4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)$$

由题意可知，$p_1 : p_2 = 5 : 4$，即 $\dfrac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)} = \dfrac{5}{4}$，得 $h=2, h=-\dfrac{1}{3}$（舍去）. 故 $h=2$，即闸门矩形部分的高应为 2 m.

3. 求引力

思路启迪： 当引力 $\mathrm{d}F$ 的方向不随小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的改变而变化时，可直接用引力公式和微元法；当引力 $\mathrm{d}F$ 的方向随小区间的改变而变化时，可将引力分解为横向、纵向两个分力后再分别用微元法.

例 45　如图 6－19 所示，一质量为 m 的质点位于原点，一根线密度为 ρ、长为 l 的均匀细棒在区间 $[a, a+l]$ 上，已知引力系数为 k，求细棒对质点的引力.

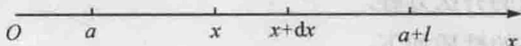


图 6－19

解： 细棒在 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 这一段的质量为 $\rho\mathrm{d}x$，对质点的引力为 $\mathrm{d}F = k\cdot\dfrac{m\rho\mathrm{d}x}{x^2}$. 故细棒对质点的引力为

$$F = \int_a^{a+l} \frac{km\rho}{x^2}\mathrm{d}x = k\rho m\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right) = \frac{k\rho ml}{a(a+l)}$$

例 46　设星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 上每一点处线密度的大小等于该点到原点的距离的三次方，求星形线在第一象限的弧段对位于原点处的单位质点的引力.

解： 如图 6－20 所示，位于点 (x, y) 处、长为 $\mathrm{d}s$ 的小段，到原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，线密度为 r^3，其质量为 $r^3\mathrm{d}s$，其中 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=3a\sin t\cos t\mathrm{d}t$.

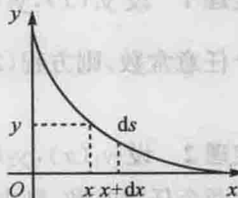


图 6－20

该小段对质点的引力为 $\mathrm{d}F = k\cdot\dfrac{r^3\mathrm{d}s}{r^2} = kr\mathrm{d}s$，其水平分量为

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cdot\frac{x}{r} = kx\mathrm{d}s$$

垂直分量为 $\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cdot\dfrac{y}{r} = ky\mathrm{d}s$. 故

$$F_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka\cos^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\mathrm{d}t = 0.6ka^2$$

$$F_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\mathrm{d}t = 0.6ka^2$$

第 7 章 常微分方程

●重要定理、公式和结论

7.1 二阶线性微分方程解的性质

设二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

令 $f(x)=0$,则方程(1)导出

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

方程(2)称为方程(1)对应的齐次方程.

二阶线性微分方程解的性质如下:

① 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为方程(2)的两个解, C_1, C_2 为两个任意常数,则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为方程(2)的解;

② 设 $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ 为方程(1)的两个解,则 $y_1^*(x)-y_2^*(x)$ 或 $y_2^*(x)-y_1^*(x)$ 为方程(2)的解;

③ 假设 $y^*(x)$, $y(x)$ 分别为方程(1),(2)的解,则 $y^*(x)+y(x)$ 为方程(1)的解.

7.2 二阶线性微分方程解的结构定理

定理 1 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为方程(2)的两个线性无关解(即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C$, C 为常数), C_1, C_2 为两个任意常数,则方程(2)的通解为

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

定理 2 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为方程(2)的两个线性无关解, $y^*(x)$ 为方程(1)的一个特解, C_1, C_2 为两个任意常数,则方程(1)的通解为

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y^*(x)$$

定理 3(叠加原理) 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 分别为方程

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_1(x) \text{ 与 } y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_2(x)$$

的解,则 $y=y_1(x)+y_2(x)$ 为方程 $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解.

● 核心题型及思路启迪

7.3 一阶微分方程的求解

题型 65 一阶可分离变量方程的求解

思路启迪：形式 1 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

解法 $\Rightarrow \frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$

形式 2 $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$

解法 $\Rightarrow \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=-\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx \Rightarrow \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=-\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+C$

当微分 dx，dy 前面的项均可分解为仅含 x 或 y 的函数乘积时，这个方程为一阶可分离变量方程. 将 x 与 y 分别放到等号两边，然后两边同时求不定积分. 当方程中出现 $f(xy)$，$f(x\pm y)$，$f(x^2\pm y^2)$ 等形式的项时，通常作相应的变量替换：$u=xy$，$u=x\pm y$，$u=x^2\pm y^2$，$\cdots$.

例 1 解方程 $(1+y^2)xdx+(1+x^2)ydy=0$.

解： 显然，方程属于可分离变量型，经变量分离得

$$\frac{x}{1+x^2}dx=-\frac{y}{1+y^2}dy$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\frac{1}{2}\ln C$$

化简得

$$(1+x^2)(1+y^2)=C$$

其中，C 为任意常数.

例 2 求解下列微分方程：

(1) $f(xy)ydx+g(xy)xdy=0$； (2) $y'=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$.

解： (1) 令 $u=xy$，代入原方程经整理得

$$[f(u)-g(u)]\frac{u}{x}dx+g(u)du=0$$

是可分离变量方程，经分离变量得

$$\frac{dx}{x}=-\frac{g(u)du}{[f(u)-g(u)]u}$$

两边积分得

$$\ln|x|+\int\frac{g(u)\mathrm{d}u}{u[f(u)-g(u)]}=C$$

其中 C 为任意常数.

(2) 令 $u=\frac{y^2}{x}$,代入原方程,经整理得

$$u'=\frac{\tan u}{x}$$

是可分离变量方程,经分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u$$

两边积分得 $\ln|x|=\ln|\sin u|+\ln C_1$,化简得 $\sin u=\pm C_1x$,即

$$\sin\frac{y^2}{x}=C\quad(C=\pm C_1)$$

其中 C 为任意常数.

题型 66 一阶齐次微分方程或可化为齐次微分方程的求解

1. 一阶齐次微分方程的求解

思路启迪: 令 $u=\frac{y}{x}$,则 $y=ux$,两边对 x 求导,得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C$$

变量还原 $u=\frac{y}{x}$ 即得方程的解.

例 3 求解下列微分方程:

(1) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$; (2) $\frac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$.

解: (1) 令 $\frac{y}{x}=u$,则 $y=ux$,$\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$,代入原方程,经整理得

$$\cos u\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分,得 $\sin u=-\ln|x|+C$,即

$$\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$$

其中 C 为任意常数.

(2) 由原方程推得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

令 $\frac{y}{x}=u$,则 $y=ux$,$\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$,代入原方程,经整理得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}$$

分离变量得

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}\right]du=\frac{dx}{x}$$

两边积分得

$$\ln|u-1|-\frac{3}{2}\ln|u-2|-\frac{1}{2}\ln|u|=\ln|x|+\ln C$$

化简得

$$\frac{|u-1|}{\sqrt{|u|}\,|u-2|^{\frac{3}{2}}}=C|x|$$

即$(y-x)^2=Cy(y-2x)^3$，其中 C 为任意常数.

例 4 求下列微分方程的通解：

(1) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$；　(2) $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$.

解：(1) 由原方程推得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

令$\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$dy=udx+xdu$，代入原方程，经整理得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u}$$

分离变量得

$$udu=\frac{dx}{x}$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$$

即 $y^2=x^2(2\ln|x|+C)$，其中 C 为任意常数.

(2) 由原方程得

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{1+2e^{\frac{x}{y}}}$$

令$\frac{x}{y}=u$，则 $x=uy$，$dx=udy+ydu$，代入原方程，经整理得

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{2e^u(u-1)}{1+2e^u}$$

分离变量得

$$\frac{1+2e^u}{u+2e^u}du+\frac{dy}{y}=0$$

两边积分得

$$\ln|u+2e^{u}|+\ln|y|=\ln C$$

代入$\frac{x}{y}=u$,整理得

$$y\left(\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}}\right)=C$$

即 $x+2ye^{\frac{x}{y}}=C$,其中 C 为任意常数.

2. 一阶可化为齐次型的微分方程的求解

思路启迪: 注意观察微分方程,若$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$,则将其化为齐次型. 解法如下:

① 当 $c_1=c_2=0$ 时,则

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

属于齐次型.

② 当$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$,即$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$ 时,则

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=g(a_2x+b_2y)$$

令 $a_2x+b_2y=u$,则$\frac{du}{dx}=a_2+b_2g(u)$,属于分离变量型.

③ 当$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$,且 c_1,c_2 不全为 0 时,解方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$,求出交点$(\alpha,\beta)$. 令 $x=X+\alpha,y=Y+\beta$,则原方程变为$\frac{dY}{dX}=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$,属于齐次型.

例 5 求解下列微分方程:

(1) $y'=\frac{y-x+1}{y+x+5}$;　　(2) $y'=\frac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$.

解: (1) 解$\begin{cases}y-x+1=0\\ y+x+5=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}$,令 $X=x+2,Y=y+3$,代入原方程得

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y-X}{Y+X}=\frac{\frac{Y}{X}-1}{\frac{Y}{X}+1}$$

再令 $Y=uX,\frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}$,代入上式得

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{u-1}{u+1}\Rightarrow\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

两边积分，得

$$\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln|X|+C$$

变量还原，得

$$\arctan\left(\frac{y+3}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+3}{x+2}\right)^2\right]=-\ln|x+2|+C$$

其中 C 为任意常数.

(2) 原方程变形为

$$\frac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}=\frac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$$

令 $y^2=\eta, x^2=\xi$，则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{2\xi+3\eta-7}{3\xi+2\eta-8}$$

解 $\begin{cases}2\xi+3\eta-7=0\\3\xi+2\eta-8=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\xi=2\\\eta=1\end{cases}$. 令 $X=\xi-2, Y=\eta-1$，代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{2X+3Y}{3X+2Y}=\frac{2+3\dfrac{Y}{X}}{3+2\dfrac{Y}{X}}$$

再令 $Y=uX, \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，代入上式得

$$\frac{3+2u}{2(1-u^2)}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

两边积分得

$$\frac{1+u}{(1-u)^5}=CX^4$$

变量还原得

$$x^2+y^2-3=C(x^2-y^2-1)^5$$

其中 C 为任意常数.

题型 67　一阶线性微分方程的求解

思路启迪：(1) 对于线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$，一般利用通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

求解；

(2) 如果不能化成线性微分方程，考虑因变量和自变量互换，即将自变量看作未知函数，将未知函数看作自变量；

(3) 对不能化为线性形式的一阶微分方程，可考虑利用常数变易法：

设 $y=\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$（将 C 看作 x 的函数）为对应齐次方程的解，将其代入并整理得：

$$\varphi'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x)\Rightarrow\varphi'(x)=q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

两边积分得：

$$\varphi(x)=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

故 $y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$ 为方程的通解.

例 6　求解下列微分方程：

(1) $xy'+y=x^2+3x+2$；　(2) $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$.

解：(1) 化原方程为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=x+\frac{2}{x}+3$$

得其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(x+\frac{2}{x}+3\right)\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$$

其中 C 为任意常数.

(2) 原方程 $\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{x}{y\ln y}=\dfrac{1}{y}$，故

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y}\left(\int\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C_1\right)=\mathrm{e}^{-\ln(\ln y)}\left(\int\frac{1}{y}\ln y\mathrm{d}y+C_1\right)$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2y+C_1\right)$$

即

$$2x\ln y=\ln^2y+C\quad(C=2C_1)$$

其中 C 为任意常数.

例 7　求解下列微分方程：

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y$ 满足条件 $y\Big|_{x=\sqrt{2}}=0$；

(2) $(1+y^2)\mathrm{d}x+(x-\arctan y)\mathrm{d}y=0$；

(3) $y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$.

解：(1) 化原方程为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=1$$

得其通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int e^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right] = \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}$$

由 $y\Big|_{x=\sqrt{2}}=0$,得 $C=-1$,故所求解为 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}$.

(2) 如果将 y 看作自变量,将 x 看作因变量,则所给微分方程为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}x = \frac{\arctan y}{1+y^2}$$

上述方程的通解为

$$\begin{aligned}
x &= e^{-\int \frac{1}{1+y^2}dy}\left(C + \int \frac{\arctan y}{1+y^2} \cdot e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy}dy\right) \\
&= e^{-\arctan y}\left(C + \int \frac{\arctan y}{1+y^2} \cdot e^{\arctan y}dy\right) \\
&= e^{-\arctan y}\left(C + \int \arctan y\, de^{\arctan y}\right) \\
&= e^{-\arctan y}(C + \arctan y e^{\arctan y} - e^{\arctan y}) \\
&= Ce^{-\arctan y} + \arctan y - 1
\end{aligned}$$

即 $x=Ce^{-\arctan y}+\arctan y-1$.

(3) 将 x 看作因变量,y 看作自变量,则

$$\text{原方程} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - x\cos y = \sin 2y \tag{1}$$

其对应的齐次方程如下:

① $\frac{dx}{dy} = x\cos y \Rightarrow \frac{dx}{x} = \cos y dy$

$$\Rightarrow \ln|x| = \sin y + \ln C_1 \Rightarrow x = Ce^{\sin y} \quad (C = \pm C_1)$$

② 令 $x=\varphi(y)e^{\sin y}$ 为方程(1)的解,代入并整理,得

$$\varphi'(y)e^{\sin y} = \sin 2y \Rightarrow \varphi'(y) = 2\sin y\cos y e^{-\sin y}$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = -2(\sin y + 1)e^{-\sin y} + C$$

故原方程的通解为

$$x = -2(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}$$

其中 C 为任意常数.

题型 68 *　伯努利方程的求解

思路启迪:形式　$y'+p(x)y=q(x)y^n(n\neq 0,1)$ 的伯努利方程解法如下:

原式 $\Rightarrow y^{-n}y'+p(x)y^{1-n}=q(x) \Rightarrow \frac{1}{1-n}(y^{1-n})'+p(x)y^{1-n}=q(x)$

令 $z=y^{1-n}$,得 $z'=(1-n)p(x)z+(1-n)q(x)$ 为关于 z 的一阶线性方程.

例 8　求解微分方程 $y'-\frac{4}{x}y=\sqrt{y}x^2$.

解：令 $z=\sqrt{y}$，得

$$z'-\frac{2}{x}z=\frac{1}{2}x^2$$

于是

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^2\left(\frac{1}{2}x+C\right)$$

故原方程的通解为 $\sqrt{y}=\frac{1}{2}x^3+Cx^2$，其中 C 为任意常数.

例 9 求微分方程 $2yy'+2xy^2=\mathrm{e}^{-x^2}\sin x$ 的通解.

解：令 $z=y^2$，则所给的微分方程为 $z'+2xz=\mathrm{e}^{-x^2}\sin x$，为一阶线性微分方程. 它的通解为

$$\begin{aligned}z&=\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left(C+\int\mathrm{e}^{-x^2}\sin x\cdot\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\&=\mathrm{e}^{-x^2}\left(C+\int\sin x\mathrm{d}x\right)=C\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}\cos x\end{aligned}$$

所以，所给微分方程的通解为 $y^2=C\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}\cos x$，其中 C 为任意常数.

题型 69* 全微分方程的求解

思路启迪：有以下三种方法：

(1) 原函数法.

若存在一个二元函数 $u(x,y)$，使

$$\mathrm{d}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

推断出 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)&\Rightarrow u(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)\\&\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\mathrm{d}x\right)+\varphi'(y)=Q(x,y)\\&\Rightarrow\varphi'(y)=?,\Rightarrow\varphi(y)=?(\text{不含常数 }C)\\&\Rightarrow u(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)=C\end{aligned}$$

(2) 分项组合法.

将已经是全微分的项提出，将不是全微分的项凑成全微分，这样的方法称为分项组合法.

要牢记如下公式：

① $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=\mathrm{d}(xy)$，$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)$；

② $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$，$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$；

③ $\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{x}{y}\right)$，$\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$；

④ $\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\dfrac{x}{y}\right)$，$\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$；

⑤ $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$.

(3)曲线积分法.

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$既是$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程的充要条件，也是曲线积分$\int_{L(x_0,y_0)}^{L(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$与路径无关的充要条件.

$$u(x,y)=\int_{L(x_0,y_0)}^{L(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

选取(x_0,y_0)的原则：

①简单；②$P(x,y)$，$Q(x,y)$在(x_0,y_0)处具有一阶连续的偏导数.

例 10 求解下列微分方程：

(1) $(2xe^y+3x^2-1)\mathrm{d}x+(x^2e^y-2y)\mathrm{d}y=0$；

(2) $\dfrac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=0$.

解：(1) $P=2xe^y+3x^2-1$，$Q=x^2e^y-2y$，于是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^y=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

方程为全微分方程.

解法 1 设存在一个$u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^y+3x^2-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^y-2y$$

在$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xe^y+3x^2-1$的两边积分得

$$u=x^2e^y+x^3-x+\varphi(y)$$

两边对y求偏导得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^y+\varphi'(y)$$

于是 $\varphi'(y)=-2y$,积分得 $\varphi(y)=-y^2$,故通解为

$$x^2e^y+x^3-x-y^2=C$$

解法 2

$$(3x^2-1)dx+(-2y)dy+(2xe^ydx+x^2e^ydy)=0$$
$$d(x^3-x)+d(-y^2)+d(x^2e^y)=0$$

于是得

$$x^2e^y+x^3-x-y^2=C$$

(2) $P=\dfrac{2x}{y^3},Q=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$,于是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

当 $y\neq0$ 时,方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=C$$

故 $x^2-\dfrac{1}{y}+1+\dfrac{x^2}{y^3}-x^2=C$,即 $x^2-y^2+y^3=Cy^3$.

例 11 求解下列微分方程:

(1) $(x^2-y^2-2y)dx+(x^2+2x-y^2)dy=0$;

(2) $xdx+ydy=(x^2+y^2)dx$.

解:(1) 本题不满足全微分方程的条件$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,但可将原方程改写为

$$(x^2-y^2)d(x+y)-2(ydx-xdy)=0$$

即

$$d(x+y)-2\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=0$$

于是

$$d(x+y)-d\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)=0$$

故 $x+y-\ln\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)=C_1$,即 $(x+y)e^{x+y}=C(x-y)$,其中 $C=e^{C_1}$.

(2) 本题不满足全微分方程的条件$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,但由思路启迪(2)中的公式可知

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]$$

于是在方程两边同除以 x^2+y^2,则原方程为

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=dx$$

即 $d\left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]=dx$,两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=x+\ln C_1$$

即

$$\ln(x^2+y^2)=2x+2\ln C_1=\ln(C_1^2e^{2x})$$

故 $x^2+y^2=Ce^{2x}$，其中 $C=C_1^2$.

7.4　二阶或二阶以上微分方程的求解

题型 70　可降阶的高阶微分方程的求解

思路启迪：(1) $y^{(n)}=f(x)$ 的解法

积分 n 次即可得，注意每积分一次要加一个常数.

(2) 不显含 y 的二阶方程 $y''=f(x,y')$ 的解法

令 $y'=p, y''=p'$ 代入方程，可得 $p'=f(x,p)$ 关于 p 的一阶方程，设有解 $p=\varphi(x,C_1)$，即

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)\Rightarrow y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$$

(3) 不显含 x 的二阶方程 $y''=f(y,y')$ 的解法

令 $y'=p,\ y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ 代入方程，可得

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

此为 p 关于 y 的一阶方程. 设有解 $p=\psi(y,C_1)$，即

$$\frac{dy}{dx}=\psi(y,C_1)\Rightarrow\frac{dy}{\psi(y,C_1)}=dx$$

积分得

$$\int\frac{dy}{\psi(y,C_1)}=x+C_2$$

例 12　求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

解：本题不含 y，设 $y'=p$，于是 $y''=p'$，原方程变为

$$p'(x+p^2)=p$$

即

$$\frac{dx}{dp}=\frac{x}{p}+p$$

解之得 $x=p(p+C)$，将 $p(1)=1$ 代入得 $C=0$，于是

$$x=p^2\Rightarrow y'=\sqrt{x}\Rightarrow y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$$

结合 $y(1)=1$ 得 $C_1=\frac{1}{3}$，故 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$.

例 13　求解下列微分方程：

(1) $yy''-(y')^2=0$；　　(2) $y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$.

解:（1）本题不显含 x，令 $y'=p$，将 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ 代入方程可得

$$py\frac{dp}{dy}-p^2=0\Rightarrow p\left(y\frac{dp}{dy}-p\right)=0$$

当 $p=0$ 时，得 $y'=0$，可解得 $y=C$.

当 $y\dfrac{dp}{dy}-p=0$ 时，可得 $p=C_1y$，即

$$y'=C_1y,\ \ln y=C_1x+\ln C_2$$

于是得 $y=C_2e^{C_1x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

（2）本题不显含 x，令 $y'=p$，将 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ 代入方程可得

$$p\frac{dp}{dy}+\frac{2}{1-y}p^2=0\Rightarrow p\left(\frac{dp}{dy}+\frac{2}{1-y}p\right)=0$$

当 $p=0$ 时，得 $y'=0$，可解得 $y=C$.

当 $\dfrac{dp}{dy}+\dfrac{2p}{1-y}=0$ 时，可得 $p=C_1(y-1)^2$，即

$$y'=C_1(y-1)^2,\ \frac{1}{1-y}=C_1x+C_2$$

于是得 $C_1x=\dfrac{1}{1-y}-C_2$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

题型 71　有关二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程解的结构的命题

思路启迪: 利用二阶常系数齐次线性方程或非齐次线性方程解的结构定理.

例 14　微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为(　　).

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$

(B) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$

(C) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$

(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

分析: 利用待定系数法确定二阶常系数非齐次线性方程特解的形式.

解: 对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda=\pm i$.

对 $y''+y=x^2+1=e^{0x}(x^2+1)$ 而言，因 0 不是特征根，从而其特解形式可设为

$$y_1^*=ax^2+bx+c$$

对 $y''+y=\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$，因 i 为特征根，从而其特解形式可设为

$$y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$$

所以 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

$$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$$

故选(A).

例 15　在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 是任意常数）为通解的是(　　).

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

分析：本题已知微分方程的通解，反求微分方程的形式，一般根据通解的形式分析出特征值，然后从特征方程入手.

解：因为 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 是任意常数)为通解，所以微分方程的特征值为 $1,\pm 2i$. 于是特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda-2i)(\lambda+2i)=0$，即

$$\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$$

于是所求的微分方程为

$$y'''-y''+4y'-4y=0$$

故选(D).

例 16　函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是(　　).

(A) $y''-y'-2y=3xe^x$　　(B) $y''-y'-2y=3e^x$

(C) $y''+y'-2y=3xe^x$　　(D) $y''+y'-2y=3e^x$

分析：本题考查二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构，以及非齐次方程的特解与对应齐次微分方程特征根的关系. 故先从所给的解分析出对应齐次微分方程的特征方程的根，然后由特解形式判定非齐次项形式.

解：由所给解的形式可知，原微分方程对应的齐次微分方程的特征根为

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$$

则对应的齐次微分方程的特征方程为

$$(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

即 $\lambda^2+\lambda-2=0$. 故对应的齐次微分方程为

$$y''+y'-2y=0$$

又 $y^*=xe^x$ 为原微分方程的一个特解，而 $\lambda=1$ 为特征单根，故原非齐次线性微分方程右端的非齐次项应具有形式 $f(x)=Ce^x$(C 为常数). 所以综合比较四个选项，应选(D).

题型 72　求二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程的通解

思路启迪：1. 二阶常系数齐次线性方程

对于二阶常系数齐次线性方程 $y''+py'+qy=0$，求解步骤如下：

(1) 写出特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，求出根 λ_1,λ_2.

(2) 分析 λ_1,λ_2，然后按以下三种情况得出通解：

① 当 λ_1,λ_2 为相异的实根时，方程的通解为 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$；

② 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$；

③ 当 $\lambda=\alpha\pm i\beta$ 时，方程的通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

2. 二阶常系数非齐次线性方程

对于二阶常系数非齐次线性方程 $y''+py'+qy=f(x)$，先求出对应齐次方程的通解 Y，然后用待定系数法或微分算子法求出一特解 y^*，相加即得所求通解 $y=Y+y^*$.

(1) 待定系数法.

表 7-1 中 $P_n(x)$ 为系数已知的 n 次多项式，$R_k(x)$，$S_k(x)$ 为系数待定的 k 次多项式，$k=\max\{m,n\}$.

表 7-1

$f(x)$形式	条　件	所设特解 $y^*(x)$的形式
$f(x)=P_n(x)$为 n 次多项式	0 不是特征根	$y^*(x)=R_n(x)$
	0 是单特征根	$y^*(x)=xR_n(x)$
	0 是重特征根	$y^*(x)=x^2R_n(x)$
$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$	α 不是特征根	$y^*(x)=e^{\alpha x}R_n(x)$
	α 是单特征根	$y^*(x)=xe^{\alpha x}R_n(x)$
	α 是重特征根	$y^*(x)=x^2e^{\alpha x}R_n(x)$
$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$	$\alpha\pm i\beta$ 不是特征根	$y^*(x)=e^{\alpha x}[R_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x]$ 其中 $k=\max(m,n)$
	$\alpha\pm i\beta$ 是特征根	$y^*(x)=xe^{\alpha x}[R_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x]$ 其中 $k=\max(m,n)$

(2) 微分算子法.

① **定义**　引进记号

$$\frac{d}{dx}=D,\frac{dy}{dx}=Dy,\frac{d^2}{dx^2}=D^2,\frac{d^2y}{dx^2}=D^2y,\cdots,\frac{d^n}{dx^n}=D^n,\frac{d^ny}{dx^n}=D^ny$$

因此，n 阶常系数线性非齐次方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

$$\Rightarrow\quad (D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x)$$

令 $F(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$，则

$$\text{方程}\Rightarrow F(D)y=f(x)\Rightarrow y^*=\frac{1}{F(D)}f(x)$$

注意：D 表示求导，$\frac{1}{D}$表示积分. 如$\frac{1}{D}x=\frac{1}{2}x^2$，$\frac{1}{D}\cos x=\sin x$，不要常数.

② $\frac{1}{F(D)}$的性质：

性质 1　$\frac{1}{F(D)}e^{kx}=\frac{1}{F(k)}e^{kx}$，$F(k)\neq0$，若 k 为 $F(k)$的 m 重根，则

$$\frac{1}{F(D)}e^{kx}=x^m\frac{1}{F^{(m)}(D)}e^{kx}=x^m\frac{1}{F^{(m)}(k)}e^{kx}$$

性质 2　若 $F(-a^2)\neq 0$

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin ax=\frac{1}{F(-a^2)}\sin ax$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\cos ax=\frac{1}{F(-a^2)}\cos ax,$$

若 $F(-a^2)=0$，不妨设 $(-a^2)$ 为 $F(-a^2)=0$ 的 m 重根，则

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin ax=x^m\frac{1}{F^{(m)}(D^2)}\sin ax$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\cos ax=x^m\frac{1}{F^{(m)}(D^2)}\cos ax$$

性质 3

$$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{kx}v(x)=\mathrm{e}^{kx}\frac{1}{F(D+k)}v(x)$$

性质 4

$$\frac{1}{F(D)}(x^p+b_1x^{p-1}+\cdots+b_{p-1}x+b_p)$$
$$=Q(D)(x^p+b_1x^{p-1}+\cdots+b_{p-1}x+b_p)$$

其中 $Q(D)$ 为 1 除以 $F(D)$ 按升幂排列 $(a_n+a_{n-1}D+\cdots+D^n)$ 所得商式，其最高次数为 p.

例 17　求解下列方程：

(1) $4y''-12y'+9y=0$；　　(2) $y''-7y'+12y=0$；

(3) $y''+2y'+3y=0$；　　(4) $y'''+y''-6y'=0$.

解：(1) 对应的特征方程为

$$4\lambda^2-12\lambda+9=0\Rightarrow(2\lambda-3)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{2}$$

故方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

(2)对应的特征方程为

$$\lambda^2-7\lambda+12=0\Rightarrow(\lambda-3)(\lambda-4)=0\Rightarrow\lambda_1=3,\ \lambda_2=4$$

故方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{4x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

(3) 对应的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=-1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$$

故方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

(4) 对应的特征方程为

$$\lambda^3+\lambda^2-6\lambda=0\Rightarrow\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=2$$

故方程的通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-3x}+C_3\mathrm{e}^{2x}$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

例 18　求解下列微分方程：

(1) $y''-2y'+y=e^x$；　　(2) $y''+y=\cos x$；

(3) $y''+2y'-3y=e^{2x}$；　　(4) $y''+4y'+5y=\sin 2x$.

解：(1) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1$$

故对应的齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

下面求方程的特解：

① 用微分算子法.

$$y^*=\frac{1}{D^2-2D+1}e^x=x^2\cdot\frac{1}{2}e^x=\frac{1}{2}x^2e^x$$

② 用待定系数法.

因为 $\alpha=1$ 为特征方程的重根，所以可设 $y^*=Ax^2e^x$，则

$$(y^*)'=Ax(2+x)e^x,\ (y^*)''=A(x^2+4x+2)e^x$$

把 $y^*,(y^*)',(y^*)''$代入方程中，得 $A=\frac{1}{2}$. 所以原方程的特解为

$$y^*=\frac{1}{2}x^2e^x$$

故原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

(2) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$$

故对应的齐次方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

下面求方程的特解：

① 用微分算子法.

$$y^*=\frac{1}{D^2+1}\cos x=x\frac{1}{2D}\cos x=\frac{1}{2}x\sin x$$

② 用待定系数法.

因为 $\lambda=\pm i$ 为特征根，所以可设 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$，则

$$(y^*)'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x)$$

$$(y^*)''=2(-A\sin x+B\cos x)-x(A\cos x+B\sin x)$$

把 $y^*,(y^*)',(y^*)''$代入方程中，得 $A=0,B=\frac{1}{2}$. 所以原方程的特解为

$$y^*=\frac{1}{2}x\sin x$$

故原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

(3) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda_1=-3,\ \lambda_2=1$$

故对应的齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

下面求方程的特解：

① 用微分算子法.

$$y^*=\frac{1}{D^2+2D-3}e^{2x}=\frac{1}{2^2+2\times2-3}e^{2x}=\frac{1}{5}e^{2x}$$

② 用待定系数法.

因为 $\alpha=2$ 不是特征根,所以可设 $y^*=Ae^{2x}$,则

$$(y^*)'=2Ae^{2x}$$
$$(y^*)''=4Ae^{2x}$$

把 $y^*,(y^*)',(y^*)''$代入方程中,得 $5Ae^{2x}=e^{2x}\Rightarrow A=\frac{1}{5}$,所以方程的特解为

$$y^*=\frac{1}{5}e^{2x}$$

故原方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x+\frac{1}{5}e^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

(4) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+5=0\Rightarrow\lambda_1=-2+i,\ \lambda_2=-2-i$$

故对应的齐次方程的通解为 $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

下面求方程的特解:

① 用微分算子法.

$$\begin{aligned}y^*&=\frac{1}{D^2+4D+5}\sin 2x=\frac{1}{-2^2+4D+5}\sin 2x=\frac{1}{4D+1}\sin 2x\\&=\frac{4D-1}{16D^2-1}\sin 2x=-\frac{1}{65}(8\cos 2x-\sin 2x)\end{aligned}$$

② 用待定系数法.

因为 $2i$ 不是特征根,所以可设 $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$,则

$$(y^*)'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$$
$$(y^*)''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$$

把 $y^*,(y^*)',(y^*)''$代入方程中,得

$$\begin{cases}B-8A=1\\A+8B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{8}{65}\\B=\dfrac{1}{65}\end{cases}$$

故方程的特解为

$$y^*=-\frac{1}{65}(8\cos 2x-\sin 2x)$$

故原方程的通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)-\frac{1}{65}(8\cos 2x-\sin 2x)$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

注: 由上述可知,求非齐次微分方程的特解时,微分算子法比待定系数法简单.

例 19　求解下列微分方程:

(1) $y''+4y'+4y=e^{\alpha x}$,其中 α 为实数;

(2) $y''+a^2y=\sin x$,其中 $a>0$ 为常数.

解:(1) 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$,特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$,故对应齐次方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$$

下面求非齐次方程的一个特解:

① 当 $\alpha\neq-2$ 时,设特解 $y^*=Ae^{\alpha x}$,则 $(y^*)'=\alpha Ae^{\alpha x}$,$(y^*)''=\alpha^2Ae^{\alpha x}$,代入原方程得 $A=\dfrac{1}{(\alpha+2)^2}$,则特解为 $y^*=\dfrac{e^{\alpha x}}{(\alpha+2)^2}$;

② 当 $\alpha=-2$ 时,设特解为 $y^*=Ax^2e^{-2x}$,则

$$(y^*)'=2Axe^{-2x}-2Ax^2e^{-2x}$$

$$(y^*)''=2Ae^{-2x}-8Axe^{-2x}+4Ax^2e^{-2x}$$

代入原方程得 $A=\dfrac{1}{2}$,故非齐次方程的通解为

$$y^*=\begin{cases}(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{(\alpha+2)^2}e^{\alpha x}, & \alpha\neq-2\\(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{\alpha x}, & \alpha=-2\end{cases}$$

另外,用微分算子法解特解如下:

$$y^*=\frac{1}{D^2+4D+4}e^{\alpha x}=\begin{cases}\dfrac{1}{(\alpha+2)^2}e^{\alpha x}, & \alpha\neq-2\\\dfrac{1}{2}x^2e^{\alpha x}, & \alpha=-2\end{cases}$$

(2) 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+a^2=0\Rightarrow\lambda=\pm a\mathrm{i}$,则对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$$

非齐次方程的一个特解为

$$y^*=\frac{1}{D^2+a^2}\sin x=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2-1}\sin x, & a\neq1\\-\dfrac{1}{2}x\cos x, & a=1\end{cases}$$

故非齐次方程的通解为

$$y^*=\begin{cases}C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{1}{a^2-1}\sin x, & a\neq1\\C_1\cos ax+C_2\sin ax-\dfrac{1}{2}x\cos x, & a=1\end{cases}$$

例 20 求二阶线性微分方程 $y''-3y'+2y=e^{-x}\sin x$ 的通解.

解:对应的齐次方程为 $y''-3y'+2y=0$,其特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,解得 $\lambda=1,2$,于是齐次方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

而

$$y^*=\frac{1}{D^2-3D+2}e^{-x}\sin x=e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2-3(D-1)+2}\sin x$$

$$=e^{-x}\frac{1}{D^2-5D+6}\sin x=e^{-x}\frac{1}{-1-5D+6}\sin x=-\frac{1}{5}e^{-x}\frac{1}{D-1}\sin x$$

$$=-\frac{1}{5}e^{-x}\frac{D+1}{D^2-1}\sin x=\frac{1}{10}e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

故所求微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{10}e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

题型 73*　**求欧拉方程的通解**

思路启迪： 各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同的方程，即形如

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$$

的方程，称为欧拉方程. 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$ 为常数.

解法　作自变量 x 的变量替换，令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，把 y 看作 t 的函数，则

$$xy'=x\cdot\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}=Dy$$

$$x^2y''=D(D-1)y$$

$$\vdots$$

$$x^ny^{(n)}=D(D-1)\cdots(D-n+1)y$$

于是欧拉方程化为 $P_n(D)y=f(e^t)$，解出 $y=y(t)$，则 $y=y(\ln x)$ 就是欧拉方程的解.

例 21　解下列微分方程：

(1) $x^2y''+xy'+y=2\sin(\ln x)$；

(2) $(x+1)^2y''-(x+1)y'+y=6(x+1)\ln(x+1)$.

解：(1) 令 $x=e^t$，即 $t=\ln x$，则原方程可化为

$$D(D-1)y+Dy+y=2\sin t$$

即

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=2\sin t$$

相应特征方程为 $\lambda^2+1=0$，解之得 $\lambda=\pm i$. 则对应的齐次方程通解为

$$y=C_1\cos t+C_2\sin t$$

特解为

$$y^*(t)=\frac{1}{D^2+1}2\sin t=t\frac{1}{2D}2\sin t=-t\cos t$$

所以原式的通解为

$$y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)-\ln x\cos(\ln x)$$

(2) 令 $x+1=e^t$，即 $t=\ln(x+1)$，则原方程可化为

$$D(D-1)y-Dy+y=6te^t$$

即
$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=6te^t$$
相应特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$,解之得 $\lambda=1$(2 重根).

于是,对应的齐次方程的通解为
$$y=(C_1+C_2t)e^t$$
特解为
$$y^*(t)=\frac{1}{D^2-2D+1}6te^t=e^t\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+1}6t=e^t\frac{1}{D^2}6t=e^tt^3$$
所以原式通解为
$$y=C_1(x+1)+C_2(x+1)\ln(x+1)+(x+1)\ln^3(x+1)$$
其中 C_1,C_2 为任意常数.

题型 74　微分方程在几何中的应用

思路启迪: 解题步骤如下:

(1) 根据所给的某几何特性画一草图;

(2) 利用 y' 表示曲线 $y=f(x)$ 上 (x,y) 点处的切线斜率或 $-\frac{dx}{dy}$ 表示曲线 $y=f(x)$ 上 (x,y) 点的法线斜率以及 $\int_a^x f(t)dt$ $(f(x)\geqslant 0)$ 表示由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a,x=t$ 及 x 轴所围成的图形的面积等方面的意义,列方程;

(3) 解方程.

例 22　设对任意 $x>0$,曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$,求 $f(x)$ 的表达式.

解: 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为
$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$
令 $X=0$,得截距 $Y=f(x)-xf'(x)$.

由题意可得 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(x)-xf'(x)$,即
$$\int_0^x f(t)dt=x[f(x)-xf'(x)]$$
上式对 x 求导,化简得 $xf''(x)+f'(x)=0$,即 $[xf'(x)]'_x=0$,积分得
$$xf'(x)=C_1$$
上式两边再次积分得
$$f(x)=C_1\ln x+C_2$$
其中 C_1,C_2 为任意常数.

例 23　设经过原点的曲线族上任一点 P 处的切线交 x 轴于点 T,从 P 点向 x 轴作垂线,其垂足为 Q,已知 PT,PQ 与 x 轴所围成的三角形的面积与曲边三角形 OPQ 的面积之比等于常数 k,

$k>\frac{1}{2}$,试求该曲线族.

解: $P(x,y)$为曲线族上一点,所以切线 PT 的方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

于是 T 坐标为$\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$, 则

$\triangle PTQ$ 的面积为

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{y'}\cdot y$$

曲边$\triangle OPQ$ 的面积为

$$S_2=\int_0^x y\mathrm{d}x$$

由题意知 $S_1/S_2=k$,即

$$k\int_0^x y\mathrm{d}x=\frac{y^2}{2y'}$$

对方程两边求导得

$$2ky(y')^2=2y(y')^2-y''y^2$$

化简为

$$yy''+2(k-1)(y')^2=0$$

令 $y'=p$,则

$$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

代入方程可得

$$py\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+2(k-1)p=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=2(1-k)\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解此一阶方程得 $p=Cy^{2(1-k)}$,即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Cy^{2(1-k)}$.

又 $k>\frac{1}{2}$,则解得

$$\frac{1}{2k-1}y^{2k-1}=Cx+C_1$$

题型 75　微分方程在物理中的应用

思路启迪: 导数的物理意义表示变化率,如速度等. 在力学中的应用的解题步骤如下:

(1) 建立坐标系,对所研究的物体进行受力分析;

(2) 根据速度 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,加速度 $a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$,牛顿第二定律 $F=ma$,列方程;

(3) 解方程.

例 24 一质量为 m 的物体，在黏性液体中由静止自由下落，假如液体阻力与运动速度成正比，比例系数为 k，试求物体运动的规律.

解： 物体受到的重力为 mg，阻力为 $-kv$，则 $-kv+mg=ma$，而 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，则方程为

$$mx''+kx'=mg$$

令 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p$，则 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=p'$，于是方程为

$$p'+\frac{k}{m}p=g$$

解方程，可得

$$p(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\left(C_1+\int g\mathrm{e}^{\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}\left(C_1+\frac{mg}{k}\mathrm{e}^{\frac{kt}{m}}\right)=C_1\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}$$

又 $x'(0)=0$，则 $C_1=-\frac{mg}{k}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

因此

$$x=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+C_2$$

又 $x(0)=0$，则 $C_2=-\left(\frac{m}{k}\right)^2g$. 故

$$x=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-1)$$

例 25 某种飞机在机场降落时，为了缩短滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9 000 kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^6$ kg/h）. 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

解：方法 1 由题设，飞机的质量 $m=9\ 000$ kg，着陆时的水平速度 $v_0=700$ km/h. 从飞机接触跑道开始计时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$.

根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$$

又

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

由以上两式得

$$\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\mathrm{d}v$$

积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v+C$. 由于 $v(0)=v_0$，$x(0)=0$，故得 $C=\frac{m}{k}v_0$，从而

$$x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t))$$

当 $v(t)\to 0$ 时，得

$$x(t)\to \frac{mv_0}{k}=\frac{9\ 000\ \text{kg}\times 700\ \text{km/h}}{6.0\times 10^6\ \text{kg/h}}=1.05\ \text{km}$$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05 km.

方法 2　根据牛顿第二定律，得 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$，所以

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

两端积分得通解 $v=C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件 $v\Big|_{t=0}=v_0$ 解得 $C=v_0$，故

$$v(t)=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t=-\frac{mv_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05\ \text{km}$$

或由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$，知

$$x(t)=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t=-\frac{mv_0}{k}(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-1)$$

故最长距离为当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\dfrac{mv_0}{k}=1.05$ km.

注：本题求飞机滑行的最长距离，可理解为 $t\to+\infty$ 或 $v(t)\to 0$ 的极限值.

例 26　在某人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的，设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微变量），其变化率与已掌握新技术的人数和未掌握新技术的人数之积成正比，比例常数 $k>0$，求 $x(t)$.

解：由题意可建立微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=kx(t)[N-x(t)]$$

显然特解 $x(t)=0$ 和 $x(t)=N$ 都不符合题意. 于是分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)[N-x(t)]}=k\mathrm{d}t$$

两边积分得

$$x(t)=\frac{NC\mathrm{e}^{kNt}}{1+C\mathrm{e}^{kNt}}$$

此外，由题意知 $x(0)=x_0$，代入上式得

$$x(t)=\frac{Nx_0\mathrm{e}^{kNt}}{N-x_0+x_0\mathrm{e}^{kNt}}$$

第 8 章* 向量代数与空间解析几何

●重要定理、公式和结论

8.1 概念和性质

设有两个向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,则

(1) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积定义为:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

运算律:

① 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

② 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

③ 与数乘向量的运算 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$,模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 成右手系.

运算律:

① 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

② 分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$;

③ 与数乘向量的运算 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

(3) 设 $\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$,则 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 的混合积为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

混合积具有下列性质:

① 具有轮换对称性,即 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$;

② 两向量积互换,混合积变号,即

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$$

8.2 两个向量之间的关系

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,$\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

(1) 两个向量垂直的充要条件

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

(2) 两个向量平行的充要条件

$$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = 0$$

其中,若 x_2, y_2, z_2 之中有一个为 0,如 $x_2=0$,应理解为 $x_1=0$.

(3) 两个向量共线的充要条件

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在不全为 0 的常数 λ, μ,使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(4) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角$\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$,可由下式求出:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

(5) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为 0 的数 λ, μ, v,使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+v\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,即$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

8.3 平面方程的几种形式

1. 点法式方程

已知平面 π 上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 和该平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$,则平面的点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

2. 一般式方程

在点法式方程中,令 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$,则 $Ax+By+Cz+D=0$,称为平面的一般式方程,其中 A,B,C 不全为 0.

若 $D=0$,则平面过原点;

若 $C=0$,则平面平行于 z 轴;

若 $B=C=0$,则平面平行于 yOz 平面;其他情况类似可写出.

3. 三点式方程

设 $M_1=(x_1,y_1,z_1)$,$M_2=(x_2,y_2,z_2)$,$M_3=(x_3,y_3,z_3)$为平面上不共线的三个点,则由它们所确定的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

4. 截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

其中:a,b,c 分别为平面在坐标轴上的截距,即平面通过 3 点$(a,0,0)$,$(0,b,0)$,$(0,0,c)$.

8.4 空间直线方程的几种形式

1. 一般式方程

已知空间中两相交平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 可以确定一直线,方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

该方程称为直线的一般式方程,其中方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$$

2. 标准式方程

已知直线上一点 $P\{x_0,y_0,z_0\}$,直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$,则直线的标准式方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

3. 两点式方程

已知空间中两个点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$可以确定唯一一条直线,向量$\overrightarrow{P_1P_2}$就可作为直线的方向向量,则方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

称为直线的两点式方程.

4. 参数式方程

$$\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt\\z=z_0+nt\end{cases}$$

$M(x_0,y_0,z_0)$为直线上的已知点,$\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$为直线的方向向量.

8.5 常见二次曲面的标准形式

(1) 球面方程 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$;

(2) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (a,b,c 均为正数);

(3) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (a,b,c 均为正数);

(4) 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (a,b,c 均为正数);

(5) 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (a,b,p 均为正数);

(6) 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (a,b,p 均为正数);

(7) 二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (a,b,c 均为正数).

●核心题型及思路启迪

题型 76 向量的运算

思路启迪: 利用向量的数量积(点积)、向量积(叉积)和混合积的定义和性质计算.

例 1 设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$,则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$______.

解:

$$
\begin{aligned}
&[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\
&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\
&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+\\
&\quad(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\
&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2\times2=4
\end{aligned}
$$

例 2 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线,且 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=-18$,求向量 $\boldsymbol{x}$.

解: 设 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\{2,-1,2\}=\{2\lambda,-\lambda,2\lambda\}$,则

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=\{2\lambda,-\lambda,2\lambda\}\cdot\{2,-1,2\}=9\lambda=-18$$

解之得 $\lambda=-2$,故 $\boldsymbol{x}=\{-4,2,-4\}$.

例 3 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=$______.

解:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0 \tag{1}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=1+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0 \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1=0 \tag{3}$$

由方程(1)、(2)、(3)得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{3}{2}$.

例 4 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直,求$\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$.

解: 由题设可知

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0\\7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0\end{cases}$$

消去 $\boldsymbol{a}^2$ 得 $46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=23\boldsymbol{b}^2$,即 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$,代回方程组可得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 于是

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$$

故$\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}=\frac{\pi}{3}$.

例 5 化简下列各式:

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

(2) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

解: (1)

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\
&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2\\
&=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2\sin^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})+(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\
&=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\\
&=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

题型 77 求平面方程

思路启迪：熟练掌握平面的各种方程形式.

(1) 若题设条件中平面过某点，则一般用点法式方程，此时问题转化为求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$.

(2) 若题设中，平面通过一条直线(该直线用两平面的交线表示)，则用平面束方程处理，即若直线方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

可设平面束方程为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

然后结合其他条件求解平面方程.

例 6 求与两直线 $L_1:\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$，$L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{1}$ 都平行且通过原点的平面方程.

解：设 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ 分别为直线 L_1,L_2 的方向向量，则 $\boldsymbol{s}_1=\{0,1,1\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{1,2,1\}$. 于是所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

故所求平面方程为

$$-(x-0)+(y-0)-(z-0)=0$$

即

$$x-y+z=0$$

例 7 求通过直线 $\begin{cases}\pi_1:x-2y-z+3=0\\\pi_2:x+y-z-1=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi:x-2y-z=0$ 垂直的平面方程.

解：设存在 λ,μ，使得

$$\lambda(x-2y-z+3)+\mu(x+y-z-1)=0$$

即

$$(\lambda+\mu)x+(\mu-2\lambda)y-(\lambda+\mu)z+3\lambda-\mu=0$$

因为所求平面与平面 $\pi:x-2y-z=0$ 垂直，所以

$$1\cdot(\lambda+\mu)-2\cdot(\mu-2\lambda)+(\lambda+\mu)=0$$

解之得 $\lambda=0$，于是

$$\mu(x+y-z-1)=0$$

故所求平面方程为 $x+y-z-1=0$.

例 8 求通过直线 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ 且与 $L_2:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$ 平行的平面方程.

解：设所求平面法向量为 $\boldsymbol{n}$，由于 L_1 在所求平面上，则 $\boldsymbol{n}\perp L_1$，$\boldsymbol{n}\perp L_2$，故可取

$$n = \{2, -1, 2\} \times \{0, 1, -1\} = \{-1, 2, 2\}$$

又(0,0,2)在所求平面上,故所求平面方程为

$$-x + 2y + 2(z - 2) = 0$$

即 $x-2y-2z+4=0$.

注: 若平面通过的直线为标准方程,可通过三向量共面求解.

设(x,y,z)为平面上任意一点,令 $\boldsymbol{s}=\{x,y,z-2\}$,又 L_1,L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{1,0,-1\}$,$\boldsymbol{s}_2=\{2,1,1\}$,则 $\boldsymbol{s}_1$,$\boldsymbol{s}_2$,$\boldsymbol{s}$ 三向量共面,故所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

即 $x-2y-2z+4=0$.

题型 78 求空间直线方程

思路启迪: 关键是找直线上的一点及直线的方向向量. 若题设条件中有一个已知点,则考虑建立直线的参数方程比较简便;若题设条件中提及直线与直线、直线与平面相交的问题,则一般将所求直线方程化成参数式比较简便,有时也用一般式.

例 9 求过点 $M(-1,2,3)$,垂直于直线 L:$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$,且平行于平面 π:$7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

解: 已知直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=\{4,5,6\}$,平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{7,8,9\}$. 于是所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

故所求直线方程为

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-3}$$

即 $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$.

例 10 已知点 $M_1(4,3,10)$和直线 L_1:$\begin{cases} 9x-2y-2z+1=0 \\ 4x-7y+4z-2=0 \end{cases}$. 若 M_2 是 M_1 关于直线 L_1 的对称点,求过点 M_2 且平行于直线 L_1 的直线 L_2.

解: 连接点 $M_1(4,3,10)$和 $M_2(x,y,z)$,设直线 M_1M_2 与 L_1 的交点为(x_0,y_0,z_0),则

$$x_0 = \frac{4+x}{2},\ y_0 = \frac{3+y}{2},\ z_0 = \frac{10+z}{2}$$

而(x_0,y_0,z_0)在L_1上，满足L_1的方程，故所求的直线方程为

$$\begin{cases}9\left(\frac{4+x}{2}\right)-2\left(\frac{3+y}{2}\right)-2\left(\frac{10+z}{2}\right)+1=0\\4\left(\frac{4+x}{2}\right)-7\left(\frac{3+y}{2}\right)+4\left(\frac{10+z}{2}\right)-2=0\end{cases}$$

即$\begin{cases}9x-2y-2z+12=0\\4x-7y+4z+31=0\end{cases}$

例 11 求过点$(-1,0,4)$，平行于平面$\pi:3x-4y+z=10$且与直线$L_1:x+1=y-3=\frac{z}{2}$相交的直线方程.

解: 设所求直线L为$\begin{cases}x=-1+lt\\y=mt\\z=4+nt\end{cases}$，$\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$.

平面π：$3x-4y+z=10$，$\boldsymbol{n}=\{3,-4,1\}$.

直线L_1：$x+1=y-3=\frac{z}{2}$，$\boldsymbol{s}_1=\{1,1,2\}$.

因为$L/\!/$平面π，所以$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$，于是$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即$3l-4m+n=0$.

因为直线L与L_1相交，所以将L的方程代入L_1中得

$$lt=mt-3=\frac{1}{2}(4+nt)$$

即
$$\begin{cases}(l-m)t=-3\\(2l-n)t=4\end{cases}$$

消去t得$4m+3n-10l=0$.

解联立方程

$$\begin{cases}3l-4m+n=0\\4m+3n-10l=0\end{cases}$$

得$l=\frac{4}{7}n,m=\frac{19}{28}n$.

取$l=16,m=19,n=28$，即得所求直线L的方程为

$$\begin{cases}x=-1+16t\\y=19t\\z=4+28t\end{cases}$$

题型 79 平面与平面、平面与直线、直线与直线的关系

思路启迪: (1) 两个平面的位置关系

设有两个平面 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

① 两平面平行 $\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

② 两平面垂直 $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

(2) 两个空间直线方程的位置关系

设两条直线方程分别为

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

① 两直线平行 $L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

② 两直线垂直 $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

③ 两直线之间的夹角

$$\cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

(3) 直线与平面的位置关系

设直线方程 L 为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

平面 π 为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

① 直线与平面垂直 $L\perp\pi \Leftrightarrow \dfrac{l}{A}=\dfrac{m}{B}=\dfrac{n}{C}$.

② 直线与平面平行 $L /\!/ \pi \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$.

③ 直线在平面上 L 在平面 π 上 $\Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$,且

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

(4) 点到平面的距离

点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(5) 点到直线的距离

点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离为

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

例 12 设有直线 $L_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$,$L_2:\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}$,证明:$L_1$ 与 L_2 是异面直线,并求平行于直线 L_1 和 L_2 且与它们等距离的平面方程.

解: L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{-1,2,1\}$ 和 $\boldsymbol{s}_2=\{0,1,-2\}$.

取 L_1、L_2 上的点 $M_1(1,0,-1)$,$M_2(-2,1,2)$,则 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,1,3\}$.

因为 $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 1 & 3\end{vmatrix}=10\neq0$,所以 L_1 与 L_2 是异面直线.

又因为 $\overline{M_1M_2}$ 的中点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

故所求平面方程为

$$-5\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\left(y-\frac{1}{2}\right)-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

即 $5x+2y+z-1=0$.

例 13 判断两直线 $L_1:\frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4}$ 和 $L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}$ 是否在同一平面内,若是,则求两直线的交点;若不是,试求它们的最短距离.

解: 直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{2,3,4\}$ 和 $\boldsymbol{s}_2=\{1,1,2\}$,并且它们分别过点 $P(0,-3,0)$,$Q(1,-2,2)$,则 $\overrightarrow{PQ}=\{1,1,2\}$.

直线 L_1 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{PQ}$ 共面,即混合积=0,因为

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

故直线 L_1 与 L_2 共面.

下面求直线 L_1 与 L_2 的交点:

令 $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4}=t$,即 $x=2t,y=-3+3t,z=4t$,代入 L_2 的方程中,得

$$\frac{2t-1}{1}=\frac{-3+3t+2}{1}=\frac{4t-2}{2}$$

解之得 $t=0$,代回 $L_1:\frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4}$ 中,可得 $x=0,y=-3,z=0$,故 $(0,-3,0)$ 为直线 L_1 与 L_2 的交点.

例 14 试讨论三平面

$$\pi_1:a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\ \pi_2:a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\ \pi_3:a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

的位置关系.

解:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ \overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

(1) $r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})=3$ 时，方程组只有唯一解，此时三平面相交于一点.

(2) $r(\overline{\mathbf{A}})=3, r(\mathbf{A})=2$ 时，方程组无解，三平面不相交.

因为 $r(\mathbf{A})=2$，所以 $\mathbf{A}$ 的三个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，于是存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$. 则当 k_1,k_2,k_3 均不为零时，三平面中任意两平面的交线与另一平面平行；当 k_1,k_2,k_3 中有一个为零时，三平面中有两个平行，另一平面与这两个平面相交.

(3) 当 $r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})=2$ 时，方程组有解且有无穷多解，此时三平面相交于一条直线.

因为 $r(\overline{\mathbf{A}})=2$，所以 $\overline{\mathbf{A}}$ 的三个行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，于是存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$. 则当 k_1,k_2,k_3 均不为零时，三平面互异；当 k_1,k_2,k_3 中有一个为零时，三平面中有两个重合.

(4) 当 $r(\overline{\mathbf{A}})=2, r(\mathbf{A})=1$ 时，方程组无解，三平面不相交. 因为 $r(\mathbf{A})=1$，所以三平面平行；又 $r(\overline{\mathbf{A}})=2$，所以三平面中最少有两平面互异.

(5) 当 $r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})=1$ 时，三个方程同解，三平面重合.

例 15 设曲线 $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ 为平面上的曲线，且 $x(t),y(t),z(t)$ 均有三阶导数，证明：

$$\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix}=0$$

证：设曲线所在的平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，由于 $M(x(t),y(t),z(t))$ 在此平面上，于是 $Ax(t)+By(t)+Cz(t)+D=0$. 方程两边对 t 求导得

$$Ax'(t)+By'(t)+Cz'(t)=0 \tag{1}$$

方程(1)两边对 t 求导得

$$Ax''(t)+By''(t)+Cz''(t)=0 \tag{2}$$

方程(2)两边对 t 求导得

$$Ax'''(t)+By'''(t)+Cz'''(t)=0 \tag{3}$$

因为 A,B,C 不全为零，所以由方程(1)、(2)、(3)所组成的齐次线性方程组有非零解，故其系数矩阵的行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix}=0$$

题型 80 求柱面方程

思路启迪：(1) 准线为 $\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，母线 // z 轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$；

准线为 $\Gamma:\begin{cases} \varphi(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$，母线 // y 轴的柱面方程为 $\varphi(x,z)=0$；

准线为 $\Gamma:\begin{cases}\psi(y,z)=0\\x=0\end{cases}$，母线$/\!/ x$轴的柱面方程为$\psi(y,z)=0$.

(2) 准线为 $\Gamma:\begin{cases}f(x,y,z)=0\\g(x,y,z)=0\end{cases}$，母线的方向向量为$\{l,m,n\}$的柱面方程的求法：

首先，在准线上任取一点(x,y,z)，则过点(x,y,z)的母线方程为

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n}$$

其中X,Y,Z为母线上任一点的活动坐标，消去方程组

$$\begin{cases}f(x,y,z)=0\\g(x,y,z)=0\\\dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}\end{cases}$$

中的x,y,z便得到所求的柱面方程.

例 16 设准线方程为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\2x^2+2y^2+z^2=2\end{cases}$，母线的方向向量为$\{-1,0,1\}$，求这个柱面方程.

解： 柱面的母线方程可表示为

$$\frac{X-x}{-1}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-z}{1}$$

令$\dfrac{X-x}{-1}=\dfrac{Y-y}{0}=\dfrac{Z-z}{1}=t$，则$x=X+t,y=Y,z=Z-t$. 将其代入准线方程，有

$$\begin{cases}(X+t)^2+Y^2+(Z-t)^2=1\\2(X+t)^2+2Y^2+(Z-t)^2=2\end{cases}\tag{1}$$

解之得$(Z-t)^2=0$，即$t=Z$，将其代入式(1)，可得所求柱面方程

$$(X+Z)^2+Y^2=1$$

例 17 设准线方程为$\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+z=0\end{cases}$，母线平行于直线$x=y=z$，求该柱面方程.

解： 由题设可知，母线的方向向量为$\{1,1,1\}$，(x,y,z)为准线上任意一点，于是柱面的母线方程可表示为

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}$$

令$\dfrac{X-x}{1}=\dfrac{Y-y}{1}=\dfrac{Z-z}{1}=t$，则$x=X-t,y=Y-t,z=Z-t$，代入准线方程，有

$$\begin{cases}(X-t)+(Y-t)-(Z-t)=1\\(X-t)-(Y-t)+(Z-t)=0\end{cases}\tag{1}$$

解之得$t=X-\dfrac{1}{2}$，将其代入式(1)，可得所求的柱面方程

$$2Y-2Z-1=0$$

题型 81 求投影线方程

思路启迪： 经过 Γ 的每一点均有平面 π 的一条垂线，这些垂线，构成一个柱面，称为 Γ 到平面 π 上的投影柱面.

(1) 投影曲线的求法：

① 求出通过空间曲线 Γ 且垂直于平面 π 的投影柱面

$$\varphi(x,y,z)=0$$

② 投影曲线为 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \pi \text{的方程}\end{cases}$.

(2) 空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 在坐标平面 xOy 上的投影曲线的求法：

① 从方程组 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 中消去 z，得到一个母线 $/\!/ z$ 轴的柱面方程 $\varphi(x,y)=0$；

② 将 $\varphi(x,y)=0$ 与 $z=0$ 联立，即得 Γ 在 xOy 平面上的投影方程 $\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$.

类似可求得 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 在坐标平面 yOz，zOx 上的投影方程.

例 18 设曲线方程为 $\begin{cases}2x^2+4y+z^2=4z\\ x^2-8y+3z^2=12z\end{cases}$，求它在三个坐标面上的投影.

解： 通过配方，将上述方程组变形为

$$\begin{cases}2x^2+4y+(z-2)^2=4\\ x^2-8y+3(z-2)^2=12\end{cases}$$

消去 z，可得 $x^2+4y=0$，于是曲线在 xOy 平面上投影方程为 $\begin{cases}x^2+4y=0\\ z=0\end{cases}$.

类似可求得曲线在 zOx，yOz 平面上的投影方程分别为 $\begin{cases}x^2+z^2=4z\\ y=0\end{cases}$，$\begin{cases}z^2-4y=4z\\ x=0\end{cases}$.

例 19 求直线 $L:\begin{cases}x=3-t\\ y=-1+2t\\ z=5+8t\end{cases}$ 在三个坐标面及平面 $\pi: x-y+3z+8=0$ 上的投影方程.

解: 直线 $L:\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\\z=5+8t\end{cases}$ 在三个坐标面 xOy,zOx,yOz 上的投影方程分别为

$$\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t,\\z=0\end{cases}\begin{cases}x=3-t\\y=0\\z=5+8t\end{cases},\begin{cases}x=0\\y=-1+2t\\z=5+8t\end{cases}$$

下面求直线 L 在平面 $\pi:x-y+3z+8=0$ 上的投影方程:

先求出通过直线 L 且垂直于平面 π 的平面 π^* 的方程,此即直线 L 在平面 π 上的投影柱面.

直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{-1,2,8\}$,平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,3\}$,设平面 π^* 的法向量为 $\boldsymbol{n}^*$,由投影柱面的意义,有

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&8\\1&-1&3\end{vmatrix}=\{14,11,-1\}$$

又平面 π^* 通过直线 L,可知直线 L 上的点 $P(3,-1,5)$ 在平面 π^* 上,于是该平面方程为

$$14(x-3)+11(y+1)-(z-5)=0$$

即 $14x+11y-z-26=0$.

故所求 L 在平面 π 上的投影方程为

$$\begin{cases}14x+11y-z-26=0\\x-y+3z+8=0\end{cases}.$$

题型 82 求旋转曲面方程

思路启迪: (1) 坐标面上的曲线绕坐标轴旋转所得旋转曲面方程的求法如下:

设曲线方程为 $\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$,那么

① 若绕 y 轴旋转,则旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)$;

② 若绕 x 轴旋转,则旋转曲面的方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})$.

其他坐标面上曲线方程绕坐标轴旋转所成的旋转曲面方程类似,绕哪个轴旋转,该轴所对应的变量不变,另一个变量用其他两个变量的平方和的算术平方根(加±号)代替.

(2) 空间曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ 绕 x 轴旋转所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases}y^2+z^2=y^2(t)+z^2(t)\\x=x(t)\end{cases}$$

消去 t 即可得.

类似可得绕 y,z 轴所得旋转曲面的方程.

例 20 求下列各平面曲线的旋转曲面方程：

(1) $\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴、y 轴；(2) $\begin{cases} z=\sqrt{y} \\ x=0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴、z 轴.

解：(1) 绕 x 轴的旋转面方程为 $x^2+4(y^2+z^2)=1$；

绕 y 轴的旋转面方程为 $x^2+z^2+4y^2=1$.

(2) 绕 y 轴的旋转面方程为 $\sqrt{z^2+x^2}=\sqrt{y}$，即 $y=z^2+x^2$；

绕 z 轴的旋转面方程为 $z=\sqrt{\sqrt{y^2+x^2}}=\sqrt[4]{y^2+x^2}$.

例 21 求直线 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 π：$x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0，并且 L_0 绕 y 轴旋转一周所得曲面方程.

解：平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}$，直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{1,1,-1\}$. 于是直线 L 在平面 π 上的投影平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

即 $x-3y-2z+1=0$.

于是 L_0 的方程为 $\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$，消去 z 得 $x=2y$. 所以 L_0 的参数式为

$$\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=\dfrac{1}{2}(1-t) \end{cases}$$

故所求旋转曲面方程为

$$x^2+z^2=(2t)^2+\left[\frac{1}{2}(1-t)\right]^2=(2y)^2+\left[\frac{1}{2}(1-y)\right]^2$$

即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

第 9 章　多元函数微分学

●重要定理、公式和结论

9.1　连续、可微和可导的关系

定理 1　设函数 $z=f(x,y)$ 有二阶连续的偏导数，则 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

定理 2　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ 一定存在，且 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

定理 3　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ 存在且连续，则 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微.

注：逆定理不成立.

9.2　多元函数的极值

定义 1　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点的邻域内有定义，$Q(x,y)$ 为该邻域内异于 $P(x_0,y_0)$ 的任一点，若恒有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$（或 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$），则 $f(x_0,y_0)$ 称为 $z=f(x,y)$ 的极小值（或极大值），极大值和极小值统称为极值，使函数取极值的点为极值点.

定义 2　方程组 $\begin{cases}f'_x(x,y)=0\\f'_y(x,y)=0\end{cases}$ 的解 (x_0,y_0) 称为 $z=f(x,y)$ 的驻点，但不一定是极值点.

定理 1（取极值的必要条件）　设 $f(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极值，又 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点存在，则 $\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=0\\f'_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$.

定理 2（取极值的充分条件）　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点的邻域内，具有二阶连续的偏导数，且 $\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=0\\f'_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$，$A=f''_{x^2}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{y^2}(x_0,y_0)$，则

(1) 若 $B^2-AC<0$，若 $A>0$（此时 $C>0$），则 $f(x_0,y_0)$ 称为 $z=f(x,y)$ 的极小值；若 $A<0$（此时 $C<0$），则 $f(x_0,y_0)$ 称为 $z=f(x,y)$ 的极大值.

(2) 若 $B^2-AC>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是 $z=f(x,y)$ 的极值.

(3) 若 $B^2-AC=0$，则用配方法验证 $f(x_0,y_0)$ 是否为 $z=f(x,y)$ 的极值.

●核心题型及思路启迪

9.3　多元函数微分

题型 83　有关二元函数定义域、极限、连续的计算题

思路启迪：(1) 求二元函数的定义域，与一元函数类似，根据分式的分母不能等于零、偶次根内的函数非负、对数的真数必须大于零、反三角函数定义域的要求等，得到不等式组，从而求得二元函数的定义域. 二元函数的定义域是一个平面区域.

(2) 求二元函数的极限，需注意：

① 必须正确理解$(x,y)\to(x_0,y_0)$的含义：它是指在平面上点(x,y)以任何方式、任何方向、任何路径趋于(x_0,y_0)；比一元函数$x\to x_0$要复杂得多.

② 判断二元函数极限不存在的方法：一是当动点(x,y)以两种不同的方式或路径$\begin{cases} y=kx & (1) \\ y=x^s-x \text{ 或 } y=x^s & (2) \end{cases}$（其中 s 为 $f(x,y)$ 分子最低次项幂）趋于点(x_0,y_0)时，函数$f(x,y)$趋于不同的极限值；二是选取一种方式或路径，动点(x,y)按此方式或路径趋于(x_0,y_0)时，极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在.

③ 求二元函数的极限，常要利用一元函数中有关求极限的公式或法则.

(3) 判断二元函数连续性的方法：因为二元函数连续的定义是建立在二元函数极限的基础之上的，因此，可通过二元函数的极限讨论二元函数的连续性.

设函数$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$点处满足条件：

① 在$P(x_0,y_0)$点处$z=f(x,y)$有定义；

② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在；

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，

则称$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$点连续.

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $z=\ln(-x-y)+\arcsin\dfrac{y}{x}$；　(2) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

解：(1) 若要使函数有意义，则须满足：

$$\begin{cases}-x-y>0\\ \left|\dfrac{y}{x}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y<0\\ |y|\leqslant|x|\text{ 且 }x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y<-x\\ -|x|\leqslant y\leqslant|x|\text{ 且 }x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\ x\leqslant y<-x\end{cases}$$

故所求函数的定义域为$\{(x,y)\mid x<0\text{ 且 }x\leqslant y<-x\}$.

(2) 若要使函数有意义，则须满足

$$\begin{cases}x-\sqrt{y}\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant\sqrt{y}\\ y\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\geqslant y\geqslant 0\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

故所求函数的定义域为$\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x^2\text{ 且 }x\geqslant 0\}$.

例 2　函数 $z=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$ 在$(0,0)$点是否连续？

解：令 $y=-x+x^3$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim_{x\to 0}(1-x^2+x^4)^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x^4-x^2)^{\frac{1}{x^4-x^2}}\right]^{\frac{x^4-x^2}{x^3}}$$

又因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^4-x^2)^{\frac{1}{x^4-x^2}}=\mathrm{e}$，但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-x^2}{x^3}$不存在，所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$不存在，则

$z=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$ 在$(0,0)$点不连续.

题型 84　简单显函数 $z=f(x,y)$ 偏导数的计算

思路启迪：(1) 在求 f'_x 时，将自变量 y 看作常数，利用一元函数的求导公式和导数的运算法则即可求得. 求 f'_y 时类似.

(2) 在求 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$（或 $f'_y(x_0,y_0)$）时，只需将 $y=y_0$（或 $x=x_0$）代入 $f(x,y)$ 中，再对 x（或 y）求导即可.

例 3　求下列函数的偏导数：

(1) 设 $z=\mathrm{e}^{x+y}\cos(y-x)$，求 z'_x,z'_y；

(2) 设 $z=x^y$，求 z'_x,z'_y.

解：(1)
$$\begin{aligned}z'_x&=[\mathrm{e}^{x+y}\cos(y-x)]'_x=\mathrm{e}^{x+y}\cos(y-x)+\mathrm{e}^{x+y}[-\sin(y-x)](-1)\\&=\mathrm{e}^{x+y}[\cos(y-x)+\sin(y-x)]\\ z'_y&=[\mathrm{e}^{x+y}\cos(y-x)]'_y=\mathrm{e}^{x+y}\cos(y-x)+\mathrm{e}^{x+y}[-\sin(y-x)]\cdot 1\\&=\mathrm{e}^{x+y}[\cos(y-x)-\sin(y-x)]\end{aligned}$$

(2) $z'_x=(x^y)'_x=yx^{y-1}$，$z'_y=(x^y)'_y=x^y\ln x$.

例 4　设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin\pi y+(x-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f'_x(x,1),f'_x(1,1),f'_y(1,1),f'_y(0,1)$.

解: 因为

$$z = f(x,1) = e^x \sin \pi + (x-1)\arctan\sqrt{x} = (x-1)\arctan\sqrt{x}$$

所以

$$f'_x(x,1) = [(x-1)\arctan\sqrt{x}]'_x = \arctan\sqrt{x} + (x-1)\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \arctan\sqrt{x} + \frac{x-1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'_x(1,1) = \left(\arctan\sqrt{x} + \frac{x-1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)_{x=1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

因为

$$z = f(1,y) = e^y \sin \pi y$$

所以

$$f'_y(1,1) = (e^y \sin \pi y)'_{y=1} = (e^y \sin \pi y + \pi e^y \cos \pi y)_{y=1} = -\pi e$$

因为

$$z = f(0,y) = \sin \pi y$$

所以

$$f'_y(0,1) = (\sin \pi y)'_{y=1} = (\pi\cos \pi y)_{y=1} = -\pi$$

题型 85　考查二元函数 $z=f(x,y)$ 的连续、偏导及可微性

思路启迪: (1) 验证 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点处可微的方法：

只要验证极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{\Delta z - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \overset{?}{=} 0$$

或

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \overset{?}{=} 0$$

若为 0，则可微；若不为 0，则不可微.

(2) 函数 $z=f(x,y)$ 连续、可导(指偏导数存在)、可微三者的关系：



例 5　设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

(1) 求 $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$;

(2) $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在点(0,0)处是否连续?

(3) $f(x,y)$在点$(0,0)$处是否可微?

解: (1) 用偏导数定义计算

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{|x|}}{x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\cos\frac{1}{|y|}}{y}=0$$

(2) 当$x^2+y^2\neq 0$时,

$$f'_x(x,y)=2x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y(x,y)=2y\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f'_x(x,y)&=\lim_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}+\frac{x}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}\sin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}\sin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}\end{aligned}$$

不存在.

而由(1)知,$f'_x(0,0)=0$,所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_x(x,y)\neq f'_x(0,0)$,即$f'_x(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

同理可证$f'_y(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

(3) $$\Delta f=f(x,y)-f(0,0)=f(x,y),\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos\frac{1}{\rho}=0$$

故$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

注: 此题说明,二元函数可微$\not\Rightarrow$偏导连续.

例 6 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数$f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$存在,则( ).

(A) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续 (B) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$及$\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$都存在 (D) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$存在

解: 由题设可知,$f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$存在,则由偏导数定义可知,两个一元函数$f(x,y_0)$在$x=x_0$处可导且$f(x_0,y)$在$y=y_0$处可导,故可推出一元函数$f(x,y_0)$在$x=x_0$处连续且$f(x_0,y)$在$y=y_0$处连续,从而$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$及$\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$都存在,故选(C).

题型 86 多元复合函数偏导数的计算

思路启迪: 多元复合函数求导法则的关键是弄清复合函数中哪些是中间变量,哪些是自变量.为直观显示变量之间的复合结构,常借助于树形图,即将函数(因变量)、中间变量、自变量用线段连接,并依照以下法则:

(1)单链是导数关系，多链是偏导数关系；

(2)一条链之间，依次求导相乘；

(3)各条链之间，逐链相加.

常见情形如下：

(1) 两个中间变量，两个自变量的情形.

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，f,φ,ψ 具有一阶连续偏导，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 对 x,y 可求偏导，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

(2) 两个(或两个以上)中间变量，一个自变量的情形.

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，f 具有一阶连续偏导，φ,ψ 可导，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 对 t 求导，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\varphi'(t)+\frac{\partial z}{\partial v}\psi'(t)$$

(3) 三个中间变量，两个自变量的情形.

$z=f(x,u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，f,φ,ψ 均具有一阶连续偏导，则复合函数 $z=f[x,\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 对 x,y 可求偏导，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x\cdot 1+f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f'_x+f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y\cdot 0+f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

注：以上公式注意事项

(1) 用图示法标出函数的复合关系，如图 9-1 所示.

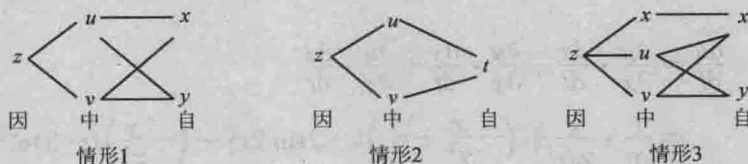


图 9-1

(2) 偏导数的结构为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\text{或}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\text{的项数}=\text{中间变量的个数}$$

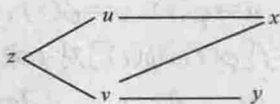
每一项是两个因子的乘积，第 1 个因子是因变量对中间变量的偏导数；第 2 个因子是中间变量对左边指定的自变量的偏导数(或导数).

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}\left(或\frac{\partial z}{\partial y}\right)$仍然是以 x,y 为自变量,以 u,v 为中间变量的函数,再求偏导数时,仍用情形(1),(2),(3)中的链式法则.

(4) 对抽象的复合函数求偏导前,一定要先引入中间变量,然后利用复合函数链式法则求偏导. 例如,$z=f(x^2+y^2,x\sin y)$,应设 $u=x^2+y^2$,$v=x\sin y$. 若要求的是高阶偏导数,则中间变量依次序用数字 1,2,3 等表示较简便.

例 7 设 $z=u\arctan(uv)$,$u=x^2$,$v=y\mathrm{e}^x$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 本题中有两个中间变量 u,v,有两个自变量 x,y,树形图为



则由复合函数链式法则,得

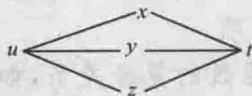
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\left[\frac{uv}{1+u^2v^2}+\arctan(uv)\right]\cdot 2x+\frac{u^2}{1+u^2v^2}\cdot y\mathrm{e}^x$$

$$=\frac{u(2xv+uy\mathrm{e}^x)}{1+u^2v^2}+2x\arctan(uv)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{u^2}{1+u^2v^2}\cdot\mathrm{e}^x=\frac{u^2\mathrm{e}^x}{1+u^2v^2}$$

例 8 设 $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$,$x=\sqrt{t}$,$y=\cos 2t$,$z=\mathrm{e}^{-3t}$,求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解: 本题只有一个自变量,树形图为



故

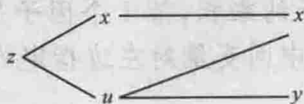
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}+\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z}\right)(-2\sin 2t)+\left(-\frac{y}{z^2}\right)(-3)\mathrm{e}^{-3t}$$

$$=\frac{1}{2xy}+\left(\frac{2x}{y^2}-\frac{2}{z}\right)\sin 2t+\frac{3y}{z}$$

例 9 设 $z=f(x,u)=x^2+u$,$u=\cos(xy)$,求$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}$.

解: 本题中 x 既是自变量,又是中间变量. 树形图为



$\dfrac{\partial f}{\partial x}$的含义是指在函数 $z=f(x,u)$ 中，将中间变量 u 看作常量，对另一中间变量 x 求偏导数，故

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+u)}{\partial x}=2x$$

而$\dfrac{\partial z}{\partial x}$是在复合后的二元函数 $z=f(x,u)=x^2+\cos(xy)$ 中将 y 看作常量，对自变量 x 求偏导，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,\cos(xy))}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2x+(-\sin(xy))y=2x-y\sin xy$$

例 10　设 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数，且 $f(1,1)=1,f'_x(1,1)=a,f'_y(1,1)=b$. 令

$$\varphi(x)=f(x,f(x,f(x,x)))$$

求 $\varphi(1),\varphi'(1)$.

解：

$$\varphi(1)=f(1,f(1,f(1,1)))=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$$

设 $\varphi(x)=f(x,y),y=f(x,z),z=f(x,x),w=x$，则

$$\varphi'(x)=f'_x+f'_y\cdot\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial y}{\partial x}=f'_x+f'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x}=f'_x+f'_w\cdot 1$$

且当 $x=1$ 时，$z=w=y=1$，于是

$$\left.\frac{\partial f(x,w)}{\partial x}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=1}=f'_x(1,1)=a$$

$$\left.\frac{\partial f(x,w)}{\partial w}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x=1}=f'_y(1,1)=b$$

于是

$$\varphi'(1)=\varphi'(x)\Big|_{x=1}=\{f'_x+f'_y[f'_x+f'_z(f'_x+f'_w)]\}\Big|_{x=1}$$
$$=a+b[a+b(a+b)]=a(1+b+b^2)+b^3$$

例 11　设 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数，即 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$，计算

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}$$

解： 令 $u=tx,v=ty,w=tz$，则 $f(u,v,w)=t^kf(x,y,z)$，两边对 t 求偏导，得

$$x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}+z\frac{\partial f}{\partial w}=kt^{k-1}f(x,y,z)$$

两边同时乘以 t，得

$$u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}+w\frac{\partial f}{\partial w}=kt^kf(x,y,z)=kf(u,v,w)$$

故

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

例 12　已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定，设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0},\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解： 令 $u=\ln y-\sin x$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=0}$$

$y-xe^{y-1}=1$ 两边对 x 求导得

$$y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0\Rightarrow y'=\frac{e^{y-1}}{1-xe^{y-1}}$$

又 $y(0)=1$，可得 $y'(0)=1$. 在 $y'=\frac{e^{y-1}}{1-xe^{y-1}}$ 两边对 x 求导得

$$y''\Big|_{x=0}=\frac{e^{y-1}y'(1-xe^{y-1})-e^{y-1}(-xe^{y-1}y'-e^{y-1})}{(1-xe^{y-1})^2}\Big|_{x=0}=2$$

所以

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=0}=f'(0)\left(-\cos x+\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=0}\\&=f'(0)\left(-\cos x+\frac{1}{y}\cdot\frac{e^{y-1}}{1-xe^{y-1}}\right)\Big|_{x=0}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}&=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\left(-\cos x+\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(\sin x-\frac{1}{y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)\right]\Big|_{x=0}\\&=f'(0)\left(\sin x-\frac{1}{y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)\Big|_{x=0}=1\end{aligned}$$

例 13 设 f 具有二阶连续偏导数

(1) $z=f\left(x^2y,\frac{y}{x}\right)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；

(2) $u=f(x,xy,xyz)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

解：(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=2xyf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xyf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'\right)\\&=2xf_1'-\frac{1}{x^2}f_2'+2xy\left(f_{11}''x^2+f_{12}''\cdot\frac{1}{x}\right)-\frac{y}{x^2}\left(f_{21}''x^2+f_{22}''\cdot\frac{1}{x}\right)\\&=2xf_1'-\frac{1}{x^2}f_2'+2x^3yf_{11}''+yf_{12}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''\end{aligned}$$

(因为 f 具有二阶连续偏导数，所以 $f_{12}''=f_{21}''$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xyf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'\right)\\&=2yf_1'+\frac{2y}{x^3}f_2'+2xy\left[f_{11}''\cdot 2xy+f_{12}''\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]-\frac{y}{x^2}\left[f_{21}''\cdot 2xy+f_{22}''\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]\\&=2yf_1'+\frac{2y}{x^3}f_2'+4x^2y^2f_{11}''-\frac{4y^2}{x}f_{12}''+\frac{y^2}{x^4}f_{22}''\end{aligned}$$

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xf_2'+xzf_3'$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}(xf_2'+xzf_3')\\&=f_2'+zf_3'+x(f_{21}''+f_{22}''\cdot y+f_{23}''\cdot yz)+xz(f_{31}''+f_{32}''\cdot y+f_{33}''\cdot yz)\\&=f_2'+zf_3'+xf_{21}''+xyf_{22}''+2xyzf_{23}''+xzf_{31}''+xyz^2f_{33}''\end{aligned}$$

注：只有二阶偏导连续时，混合偏导数项才能合并.

例 14 已知 $u=u(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1}$$

(1) 试选择参数 α,β，利用变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{\alpha x+\beta y}$ 将原方程变形，使新方程中不出现一阶偏导数项；

(2) 再令 $\xi=x+y,\eta=x-y$，求新方程变换形式.

解：(1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{\alpha x+\beta y}+v\alpha e^{\alpha x+\beta y}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha v\right)e^{\alpha x+\beta y} \tag{2}$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\beta v\right)e^{\alpha x+\beta y} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{\alpha x+\beta y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha v\right)e^{\alpha x+\beta y}\cdot\alpha\\&=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha^2 v\right)e^{\alpha x+\beta y}\end{aligned} \tag{4}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\beta\frac{\partial v}{\partial y}+\beta^2 v\right)e^{\alpha x+\beta y} \tag{5}$$

将方程(2),(3),(4),(5)代入方程(1)，并消去 $e^{\alpha x+\beta y}$，得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(2\alpha+a)\frac{\partial v}{\partial x}+(-2\beta+a)\frac{\partial v}{\partial y}+(\alpha^2-\beta^2+a\alpha+a\beta)v=0$$

由题意可知，应令 $\begin{cases}2\alpha+a=0\\-2\beta+a=0\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}\alpha=-\dfrac{a}{2}\\\beta=\dfrac{a}{2}\end{cases}$，故原方程变形为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{6}$$

(2) 令 $\xi=x+y,\eta=x-y$，则

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \tag{7}$$

将式(7)代入式(6)可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}=0$$

题型 87 隐函数偏导数的计算

思路启迪：关键是弄清哪些是自变量，哪些是因变量. 一阶偏导数的计算一般利用直接求导法、公式法或全微分法. 而对由方程组确定的隐函数，其一阶偏导数的计算，一般用直接求导法. 常见情形如下：

(1) 可确定一个因变量、一个自变量.

由方程 $F(x,y)=0$ 确定 $y=y(x)$,若 $F'_y(x,y)\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

(2) 可确定一个因变量、两个自变量.

由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定 $z=z(x,y)$,若 $F'_z(x,y,z)\neq 0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

(3) 可确定两个因变量、一个自变量.

由方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 只能确定一个自变量、两个因变量的函数. 若求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则 y,z 为因变量,x 为自变量. 一般利用以下方法:

① 方程两边对自变量求导;

② 利用一阶微分形式的不变性.

例 15 设方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 确定了函数 $z=f(x,y)$,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: 先求一阶偏导数.

方法 1(直接法) 方程两边同时对 x 求偏导,这时将 y 看作常数,得

$$\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$$

方法 2(公式法) 原方程可写为

$$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=\frac{x}{z}-\ln z+\ln y=0$$

而

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{z},\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{y},\ \frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{x+z}{z^2}$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{z}{x+z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{z^2}{y(x+z)}$$

方法 3(全微分法) 方程两边微分,得

$$\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}=\mathrm{d}(\ln z-\ln y)=\frac{\mathrm{d}z}{z}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\Rightarrow\mathrm{d}z=\frac{z}{x+z}\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y(x+z)}\mathrm{d}y$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$$

下面求二阶混合偏导数：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x+z}\right)=\frac{x}{(x+z)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz^2}{y(x+z)^3}$$

例 16　设 $x+y+z=e^{xy}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解：方程 $x+y+z=e^{xy}$ 两边微分，得

$$dx+dy+dz=e^{xy}(ydx+xdy)$$

即

$$dz=(ye^{xy}-1)dx+(xe^{xy}-1)dy$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}-1,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$$

因为方程关于 x,y 对称，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)e^{xy}$$

注：当函数为对称形式或类对称形式时，可简化计算.

例 17　设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定，F 可微，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：令 $u=x+\frac{z}{y}$，$v=y+\frac{z}{x}$，则 $F(u,v)=0$.

F 是类对称方程(即将 u 换成 v，同时，将 x 换成 y，y 换成 x，方程形式不变).

方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 两边对 x 求导得

$$F'_u\left(1+\frac{1}{y}z'_x\right)+F'_v\left(-\frac{z}{x^2}+\frac{z'_x}{x}\right)=0$$

上述方程两边同时乘以 x^2y，得

$$x^2F'_u(y+z'_x)+yF'_v(-z+xz'_x)=0$$

即

$$xz'_x=\frac{yzF'_v-x^2yF'_u}{xF'_u+yF'_v}$$

由类对称性，可得

$$yz'_y=\frac{xzF'_u-y^2xF'_v}{xF'_u+yF'_v}$$

故

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$$

例 18　求由方程组$\begin{cases}z=x^2+y^2\\x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$所确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$.

解：方程组中的每个方程两边对 x 求导得

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=2x+2y\dfrac{dy}{dx}\\2x+4y\dfrac{dy}{dx}+6z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}-2y\dfrac{dy}{dx}=2x\\4y\dfrac{dy}{dx}+6z\dfrac{dz}{dx}=-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x}{1+3z}\\\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}\end{cases}$$

例 19　设 $y=y(x)$ 由$\begin{cases}x=\arctan t\\2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$确定，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解：对方程两边微分可得

$$\begin{cases}dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt\\2dy-y^2dt-2tydy+e^tdt=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt\\2(1-ty)dy=(y^2-e^t)dt\end{cases}$$

于是

$$2(1-ty)dy=(y^2-e^t)(1+t^2)dx$$

故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$$

例 20　设 $y=g(x,z),f(x-z,y)=0,g,f$ 均可求偏导，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解：由题设可得$\begin{cases}y=g(x,z)\\f(x-z,y)=0\end{cases}$，方程组中的每个方程的两边求微分可得

$$\begin{cases}dy=g'_xdx+g'_zdz\\f'_u(dx-dz)+f'_ydy=0\end{cases}\quad(\text{设 }u=x-z)$$

于是

$$\begin{cases}dy=g'_xdx+g'_zdz\\-f'_ydy=f'_udx-f'_udz\end{cases}$$

上述方程组消去 dz 后可得

$$(f'_u-f'_yg'_z)dy=(g'_xf'_u+f'_ug'_z)dx$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'_xf'_u+f'_ug'_z}{f'_u-f'_yg'_z}$$

注：由以上可看出，利用一阶微分形式不变性求函数的微分法，无论变量之间的关系如何复杂，都可以不加区分，而统一作为自变量处理. 因此，在求全微分和一阶偏导数时，用一阶微分形式不变性求解，既简便又不易出错.

题型 88 多元函数全微分的计算

思路启迪：(1) 利用可微的必要条件，先求一阶偏导数，再求全微分.

当 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微时，$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

(2) 利用全微分的四则运算法则.

(3) 利用一阶全微分形式不变性求全微分.

例 21 设 $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$，求 $\mathrm{d}z$.

解：先求一阶偏导数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

故

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

例 22 设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续的偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$.

解：对方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两边微分，得

$$e^x\mathrm{d}x+xe^x\mathrm{d}x-e^y\mathrm{d}y-ye^y\mathrm{d}y=e^z\mathrm{d}z+ze^z\mathrm{d}z$$

解得

$$\mathrm{d}z=\frac{1+x}{1+z}e^{x-z}\mathrm{d}x-\frac{1+y}{1+z}e^{y-z}\mathrm{d}y$$

对 $u=f(x,y,z)$ 两边微分，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y+f'_z\mathrm{d}z\\&=\left(f'_x+f'_z\frac{1+x}{1+z}e^{x-z}\right)\mathrm{d}x+\left(f'_y-f'_z\frac{1+y}{1+z}e^{y-z}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

例 23 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定，求 $\mathrm{d}z\Big|_{P(1,0,-1)}$.

解：对方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 两边取微分，得

$$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

将 $P(1,0,-1)$ 代入上式，得

$$-\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}=0$$

则

$$\mathrm{d}z\Big|_{P(1,0,-1)}=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$$

9.4* 多元函数在几何上的应用

题型 89　求空间曲线在某点处的切线和法平面方程

思路启迪: (1) 设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t \in T \\ z = z(t) \end{cases}$$

则曲线 Γ 在其上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$（对应的 $t=t_0$）处的切线和法平面方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

(2) 设空间曲线 Γ 的一般式方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

则曲线 Γ 在其上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线和法平面方程为

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_P} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_P} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_P}$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_P (x - x_0) + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_P (y - y_0) + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_P (z - z_0) = 0$$

其中

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix},\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix},\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

是雅可比行列式.

例 24　求曲线 Γ: $\begin{cases} x = \int_0^t e^u \cos u\,du \\ y = 2\sin t + \cos t \\ z = 1 + e^{3t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

解: 当 $t=0$ 时, $x=0, y=1, z=2$, 且

$$x'(0) = (e^t \cos t)\,|_{t=0} = 1$$

$$y'(0) = (2\cos t - \sin t)\,|_{t=0} = 2$$

$$z'(0) = (3e^{3t})\,|_{t=0} = 3$$

故曲线在 $t=0$ 处的切线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$$

法平面方程为

$$(x-0)+2(y-1)+3(z-2)=0$$

即 $x+2y+3z-8=0$.

例 25 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点$(1,-2,1)$处的切线和法平面方程.

解：令 $\begin{cases}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6=0\\G(x,y,z)=x+y+z=0\end{cases}$，则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,-2,1)}=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\1 & 1\end{vmatrix}\right|_{(1,-2,1)}=2(y-z)\,|_{(1,-2,1)}=-6$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,-2,1)}=\left.\begin{vmatrix}2z & 2x\\1 & 1\end{vmatrix}\right|_{(1,-2,1)}=2(z-x)\,|_{(1,-2,1)}=0$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,-2,1)}=\left.\begin{vmatrix}2x & 2y\\1 & 1\end{vmatrix}\right|_{(1,-2,1)}=2(x-y)\,|_{(1,-2,1)}=6$$

故曲线在点$(1,-2,1)$的切线方程为

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{6}$$

切平面方程为

$$-6(x-1)+0(y+2)+6(z-1)=0$$

即 $x-z=0$.

题型 90 求空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程

思路启迪：(1) 设曲面 S 为显式方程 $z=f(x,y)$，则过 S 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面与法线方程分别为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P}=\frac{z-z_0}{-1}$$

其中 $P(x_0,y_0)$ 为与 $M(x_0,y_0,z_0)$ 对应的 xOy 平面上的一点.

(2) 设曲面 S 为隐式方程 $F(x,y,z)=0$，则过 S 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面与法线方程分别为

$$F'_x\Big|_M(x-x_0)+F'_y\Big|_M(y-y_0)+F'_z\Big|_M(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x\,|_M}=\frac{y-y_0}{F'_y\,|_M}=\frac{z-z_0}{F'_z\,|_M}$$

例 26 求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点(1,2,0)处的切平面和法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$,则

$$F'_x\Big|_{(1,2,0)}=(2y)\Big|_{(1,2,0)}=4$$

$$F'_y\Big|_{(1,2,0)}=(2x)\Big|_{(1,2,0)}=2$$

$$F'_z\Big|_{(1,2,0)}=(1-e^z)\Big|_{(1,2,0)}=0$$

故所求切平面方程为

$$4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0$$

即 $2x+y-4=0$.

法线方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{0}$$

即$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{0}$.

例 27 证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的切平面通过一定点.

分析: 由曲面方程可知这定点不是(a,b,c)就是(b,a,c),(a,c,b),….

证: 由方程 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$,有

$$f'_x=f'_1\cdot\frac{1}{z-c}$$

$$f'_y=f'_2\cdot\frac{1}{z-c}$$

$$f'_z=-\frac{1}{(z-c)^2}[f'_1(x-a)+f'_2(y-b)]$$

于是,曲面的切平面方程为

$$f'_x(X-x)+f'_y(Y-y)+f'_z(Z-z)=0$$

即

$$f'_1\cdot\frac{1}{z-c}(X-x)+f'_2\cdot\frac{1}{z-c}(Y-y)-\frac{1}{(z-c)^2}[f'_1(x-a)+f'_2(y-b)](Z-z)=0$$

即

$$[(z-c)(X-x)-(x-a)(Z-z)]f'_1+[(z-c)(Y-y)-(y-b)(Z-z)]f'_2=0$$

显然,当$(X,Y,Z)=(a,b,c)$时,上式恒成立.

故曲面的切平面通过一定点(a,b,c).

9.5　多元函数的极值和最值

题型91　求多元函数的极值

思路启迪：分清楚是无条件极值还是条件极值.

(1) 无条件极值的求法

无条件极值是指函数自变量只受定义域约束的极值，一般利用二阶偏导数之间的关系和符号判断：

① 解方程组$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$，求驻点，设为$(x_i,y_i)$，$i=1,2,3,\cdots$；

② 用定理2判别；

③ 求出极值.

当定理2无法判别时用配方法.

(2) 条件极值的求法

条件极值是指函数的自变量除受定义域约束外，还受其他条件限制的极值，求这类极值有两种方法：

① 化为无条件极值求解；

② 拉格朗日乘数法.

具体如下：

设目标函数为$u=f(x,y,z)$，约束条件为$\varphi(x,y,z)=0$，求极值.

方法1　化为无条件极值

① $\varphi(x,y,z)=0$中解出$z=z(x,y)$(不一定能解出)；

② 代入$u=f(x,y,z)$中，得$u=f(x,y,z(x,y))$；

③ 再按无条件极值求解.

方法2　拉格朗日乘数法

① 作辅助函数

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

② 解方程组

$$\begin{cases} F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0 \\ F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

求出驻点(x_0,y_0,z_0). 求驻点时，先将含λ的项移到右边，然后通过前三个方程得出x与y的关系式(或x与yz的关系式)，x与z的关系式(或x与yz的关系式)，最后将关系式代入$\varphi(x,y,z)=0$中解出x_0,y_0,z_0；

③求出极值.

注:① 当 $f(x,y,z)$ 含有绝对值符号时,由拉格朗日乘数法作辅助函数

$$F(x,y,z)=f^2(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

② 当目标函数 $f(x,y,z)$ 比较复杂时,可取在相同的约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下与 $f(x,y,z)$ 具有相同驻点的简单形式 $f_*(x,y,z)$,作辅助函数

$$F(x,y,z)=f_*(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

例 28 求 $V=xyz$ 在 $x+y+z=1$ 条件下的极值.

解: 由 $x+y+z=1$ 可知,$z=1-x-y$,代入 $V=xyz$ 得

$$V=xy(1-x-y)=xy-x^2y-xy^2$$

令 $\begin{cases}V'_x=y-2xy-y^2=0\\V'_y=x-2xy-x^2=0\end{cases}$,解得

$$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$$

又 $A=V''_{xx}=-2y$, $B=V''_{xy}=1-2x-2y$, $C=V''_{yy}=-2x$,故

$(B^2-AC)\Big|_{(1,0)\text{或}(0,1)}=1>0$,又 $C<0$,所以点 $(1,0)$ 和点 $(0,1)$ 不是极值点;

$(B^2-AC)\Big|_{(0,0)}=0$,但点 $(0,0,1)$ 的邻域内为有使 $V=xyz$ 取大于零的值,也有取小于零的值,所以 $(0,0,1)$ 不是极值点;

$(B^2-AC)\Big|_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}=-\frac{1}{3}<0$,又 $A<0$,所以点 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 是极大值点,极大值为 $\frac{1}{27}$.

因此,$V=xyz$ 有极大值 $V\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$,无极小值.

例 29 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解: 方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边分别对 x 和 y 求偏导得

$$\begin{cases}2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0\\-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\tag{1}$$

令 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\\frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$,得 $\begin{cases}x-3y=0\\-3x+10y-z=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}x=3y\\z=y\end{cases}$,将此式代入

$$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$$

得

$$\begin{cases}x=9\\y=3\\z=3\end{cases} 或 \begin{cases}x=-9\\y=-3\\z=-3\end{cases}$$

式(1)中的方程继续对 x 和 y 求偏导得

$$\begin{cases}2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\\-6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0\\20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\end{cases}$$

所以

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}$$

则 $B^2-AC=-\dfrac{1}{36}<0$，又 $A>0$，故点$(9,3)$是 $z(x,y)$的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，由

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3}$$

可知 $B^2-AC=-\dfrac{1}{36}<0$，又 $A<0$，故点$(-9,-3)$是 $z(x,y)$的极大值点，极大值为

$$z(-9,-3)=-3$$

题型 92　求多元函数的最值

思路启迪： 设函数 $z=f(x,y)$在有界闭域 D 上连续，则 $z=f(x,y)$在 D 上一定有最值，求法如下：

(1) 求 $z=f(x,y)$在闭域 D 内的极值；

(2) 求 $z=f(x,y)$在 D 的边界线上的极值；

(3) 比较所得结果，最大者为最大值，最小者为最小值；

(4) 实际问题中的极值即为最值.

例 30　求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值.

解： 先求函数 $f(x,y)$在 D 内的驻点. 令

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0\\f'_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$$

得驻点$(2,1)$，且 $f(2,1)=4$.

再求 $f(x,y)$在 D 的边界上的最值.

在边界 $x=0$ 和 $y=0$ 上，$f(x,y)=0$；

在边界 $x+y=6$ 上，$f(x,y)=x^2(6-x)(-2)=2x^3-12x^2$，$0<x<6$.

令 $f'_x(x,y)=6x^2-24x=0$，得 $x=4$，则 $y=2$，$f(4,2)=-64$.

比较上述各函数值可知，$f(x,y)$在 D 上的最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64$.

注：该题求 $f(x,y)$在边界 $x+y=6$ 上的最值，是将条件极值转化为无条件极值来处理的.

例 31 设在平面上有 $A(1,3)$，$B(4,2)$两点，C 为椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$上位于第一象限上的一点，求$\triangle ABC$面积的最值.

解：设 C 点坐标为 $C(x,y)$，则$\triangle ABC$的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\mid x+3y-10\mid$$

约束条件为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

令 $F(x,y)=(x+3y-10)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)$，解方程组

$$\begin{cases}F'_x=2(x+3y-10)+\frac{2}{9}\lambda x=0\\ F'_y=6(x+3y-10)+\frac{1}{2}\lambda y=0\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$$

得 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}$，$y=\frac{4}{\sqrt{5}}$，则 $S_{\triangle ABC}\Big|_{\left(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)}\approx 1.646$.

而在边界点，$S_{\triangle ABC}\Big|_{(0,2)}=2$，$S_{\triangle ABC}\Big|_{(3,0)}=\frac{7}{2}$. 故 $\min S_{\triangle ABC}=1.646$，$\max S_{\triangle ABC}=\frac{7}{2}$.

例 32 已知曲线 C：$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线 C 距离 xOy 面最远的点和最近的点.

分析：设(x,y,z)为曲线 C 上的任意一点，则(x,y,z)到 xOy 面的距离为$|z|$.

解：设曲线 C：$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$上的任意一点为$(x,y,z)$，则$(x,y,z)$到 xOy 面的距离为$|z|$，等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点.

设

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$$

由

$$\begin{cases}F'_x=2\lambda x+\mu=0\\ F'_y=2\lambda y+\mu=0\\ F'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0\\ x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$$

解之得$\begin{cases}x=1\\y=1,\\z=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-5\\y=-5.\\z=5\end{cases}$

根据几何意义,曲线 C 上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点,故所求点依次为$(-5,-5,5)$和$(1,1,1)$.

例 33 如图 9-2 所示,A_1,A_2 是曲线 $y=ax^2$、直线 $x=1$ 和 x 轴所围图形的两个内接矩形的面积,求 $A=A_1+A_2$ 的最大值.

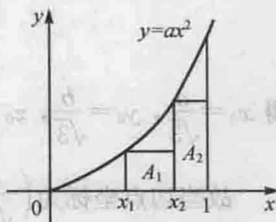


图 9-2

解: 如图 9-2 所示

$$\begin{aligned}A&=A_1+A_2\\&=ax_1^2(x_2-x_1)+ax_2^2(1-x_2)\\&=ax_1^2x_2-ax_1^3+ax_2^2-ax_2^3\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial x_1}=2ax_1x_2-3ax_1^2=0\\\dfrac{\partial A}{\partial x_2}=ax_1^2+2ax_2-3ax_2^2=0\end{cases}$$

得驻点$\left(\frac{12}{23},\frac{18}{23}\right)$. 于是,当 $x_1=\frac{12}{23}$,$x_2=\frac{18}{23}$时,得

$$A_{\max}=a\left(\frac{12}{23}\right)^2\left(\frac{18}{23}-\frac{12}{23}\right)+a\left(\frac{18}{23}\right)^2\left(1-\frac{18}{23}\right)=\frac{108}{529}a$$

例 34* 在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面,使切平面与三坐标轴所围成的四面体的体积最小,求切点坐标和最小体积.

解: 设切点坐标为 $P(x_0,y_0,z_0)$,则过 P 点的椭球面的切平面方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

则切平面在 x,y,z 轴上的截距分别为

$$x=\frac{a^2}{x_0},\ y=\frac{b^2}{y_0},\ z=\frac{c^2}{z_0}$$

于是,切平面与三个坐标面所围成的四面体体积为

$$V=\frac{1}{6}xyz=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$$

此为目标函数,因为切点在椭球面上,所以约束条件为

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

选目标函数对应的函数为

$$v=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$$

令

$$F=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_0}=\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2\lambda x_0}{a^2}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y_0}=\dfrac{1}{y_0}+\dfrac{2\lambda y_0}{b^2}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z_0}=\dfrac{1}{z_0}+\dfrac{2\lambda z_0}{c^2}=0\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1\end{cases}$$

得 $x_0=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，$y_0=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$，$z_0=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

故当切点坐标为$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$时，所求四面体的体积最小，即 $\min V=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$.

第 10 章 重积分

●重要定理、公式和结论

10.1 二重积分的性质和定理

(1) $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ （k 为常数）.

(2) $\iint\limits_D [f_1(x,y)\pm f_2(x,y)\pm\cdots\pm f_n(x,y)]\mathrm{d}\sigma=$

$\iint\limits_D f_1(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint\limits_D f_2(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\cdots\pm\iint\limits_D f_n(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(3) $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=A$ （A 为 D 的面积）.

(4) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\cdots+\iint\limits_{D_k} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,

其中 $D=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_k$，且 $D_i\cap D_j=\varnothing(i\neq j)$.

(5) **比较定理** 设 $f(x,y)\leqslant g(x,y),(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(6) **估值定理** 设 $(x,y)\in D, m\leqslant f(x,y)\leqslant M$，则 $mA\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant MA$，其中 A 为 D 的面积.

(7) **中值定理** 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上至少存在一个 (ξ,η)，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)A$，其中 A 为 D 的面积.

(8) 设积分域 D 关于坐标轴对称，被积函数 $f(x,y)$ 为奇偶函数的积分.

① 若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 D^* 为 D 关于 x 轴的上半部分；

② 若 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 D^* 为 D 关于 y 轴的右半部分；

③ 若 D 关于直线 $y=x$ 对称,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$.

注: 关于积分域 D 的要求:积分域的边界线与平行坐标轴的直线的交点不超过两个,若超过,应将 D 分成若干小块,使其满足要求;此外,也可作辅助线将积分域 D 化为若干个关于 x(或 y)轴对称的区域之和,然后再考查 $f(x,y)$ 的奇偶性.

10.2 二重积分的计算

1. 直角坐标系下二重积分的计算

(1) 适用情况:当 D 为折边形时,选择直角坐标系,即 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 选择累次积分的积分次序,选序原则如下:

① 先积分的容易并能为后积分创造条件;

② 对 D 的划分块越少越好.

(3) 确定累次积分的上下限:

① 如果 D 为 X-型区域,即 $D:\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b$,则定限方法如下:

在 x 的区间$[a,b]$内自下向上作一条直线 l,使其平行于 y 轴,设先与 D 的边界曲线 $y=\varphi_1(x)$ 相交,则取 $\varphi_1(x)$ 为下限;后与 D 的边界曲线 $y=\varphi_2(x)$ 相交,则取 $\varphi_2(x)$ 为上限,于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

② 如果 D 为 Y-型区域,即 $D:\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d$,则定限方法如下:

在 y 的区间$[c,d]$内自左向右作一条直线 l,使其平行于 x 轴,设先与 D 的边界曲线 $x=\psi_1(y)$ 相交,则取 $\psi_1(y)$ 为下限;后与 D 的边界曲线 $x=\psi_2(y)$ 相交,则取 $\psi_2(y)$ 为上限,于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

③ 如果 D 既不是 X-型区域也不是 Y-型区域,则可作辅助线将 D 划分成若干个不相交的 X-型区域或 Y-型区域的闭区域,然后利用二重积分的性质,将积分区域 D 上的二重积分分解为各小闭区域上的二重积分之和.

(4) 在直角坐标系下计算二重积分的步骤如下:

① 画出积分区域的图形.

② 根据积分区域的形状及被积表达式确定积分顺序.

③ 根据定限方法,确定内、外层积分的积分限.外层的积分限与两个积分变量无关,是常数;内层的积分限一般是外层积分变量的函数或常数.

④ 计算二次积分.先算内层积分,其结果作为外层积分的被积函数,再算外层积分.

例 1 计算 $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的区域.

解: 积分区域如图 10-1 所示.

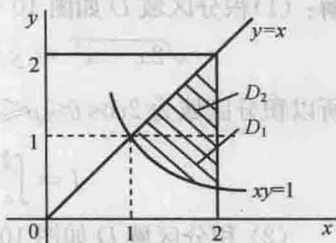


图 10－1

方法一：先对 y 积分，后对 x 积分，则

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\frac{y^3}{3x^2}\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3x^5}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{1}{12x^4}\right)\Big|_1^2 = \frac{27}{64}$$

方法二：先对 x 积分，后对 y 积分，则

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(y^3 - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y + \int_1^2 \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{27}{64}$$

显然，根据本题积分区域，选择先对 y 积分，较为简便.

2. 极坐标系下二重积分的计算

(1) 适用情况：

① 当被积函数含有 x^2+y^2 或 $\frac{y}{x}$ 或 $\frac{x}{y}$，而积分区域为圆域、圆环或由圆周的一部分围成的区域时，常采用极坐标系计算二重积分，即

$$I = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

② 当被积函数 $f(x,y)$ 为 $f(x^2+y^2)$ 或 $f\left(\frac{x}{y}\right)$ 或 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 时，有时也用极坐标系.

(2) 选序原则与直角坐标系下的二重积分相同.

(3) 在极坐标系下计算二重积分的步骤如下：

① 画出积分区域的图形.

② 一般先对 ρ 积分，后对 θ 积分.

若积分区域 D 可表示为 $D: \varphi_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\varphi_2(\theta), \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，具体如下：从极点在积分区域内作一条直线 l，它先与 D 的边界曲线 $\rho=\varphi_1(\theta)$ 相交，取 $\varphi_1(\theta)$ 为下限，后与 D 的边界曲线 $\rho=\varphi_2(\theta)$ 相交，取 $\varphi_2(\theta)$ 为上限，则

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

③ 在极坐标系中，若先对 θ 积分，后对 ρ 积分，其步骤如下：

首先，画出积分区域，将积分区域的边界曲线用极坐标表示出来.

然后，确定积分限. ρ 的积分限为常数，θ 的积分限的确定方法是：以原点 O 为圆心画一系列同心圆(逆时针方向)，同心圆与积分区域 D 的边界曲线相交，先交的曲线作为下限，后交的曲线作为上限.

例 2 计算下列二重积分：

(1) $I=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\right\}$.

(2) $I=\iint_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$, D 为由 $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=x$, $y=0$, $x=1$ 所围成的区域.

解: (1)积分区域 D 如图 10-2 所示.

$$\sqrt{2x-x^2}=y\Rightarrow 2\rho\cos\theta=\rho^2\Rightarrow\rho=2\cos\theta,\sqrt{4-x^2}=y\Rightarrow\rho=2$$

所以积分区域为 $2\cos\theta\leqslant\rho\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,故

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{4}$$

(2) 积分区域 D 如图 10-3 所示.

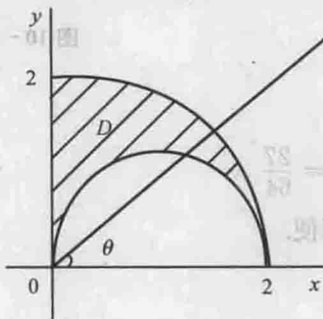


图 10-2

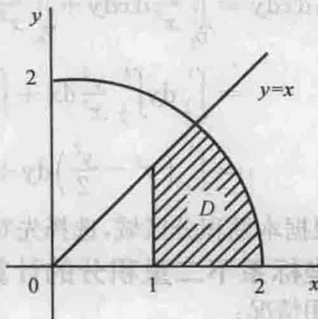


图 10-3

因为 $x=\rho\cos\theta=1\Rightarrow\rho=\frac{1}{\cos\theta}$,所以积分域为

$$\frac{1}{\cos\theta}\leqslant\rho\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$$

故

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2}\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\theta-\frac{\theta}{2\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\tan\theta=\frac{\pi^2}{16}-\left(\frac{\theta}{2}\tan\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(\ln\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2$$

●核心题型及思路启迪

10.3　二重积分

题型 93　更换二重积分的积分次序

思路启迪: (1) 由给出的累次积分的上下限写出积分域 D 所满足的不等式组;

(2) 由该不等式组画出积分域 D 的草图;

(3) 写出新的积分次序,然后按定限口诀确定新的累次积分上下限.

例 3　更换下列积分的积分次序:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{\frac{\pi y}{2}}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y) \mathrm{d}x$.

解：(1) 由题可知，$0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, y \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi y}{2}}$，积分域草图如图 10－4 所示，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{\frac{\pi y}{2}}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{2}{\pi}x^2}^{x} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}y$$

(2) 由题可知，$0<y<1, 1-\sqrt{1-y^2}<x<2-y$，积分域草图如图 10－5 所示，则

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y) \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) \mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y) \mathrm{d}y$$

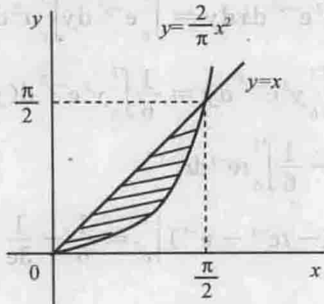


图 10－4

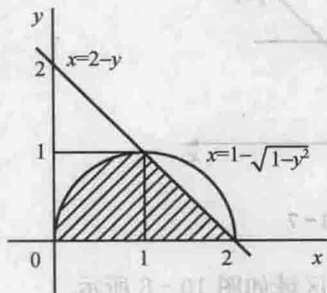


图 10－5

例 4　更换 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} f(\rho,\theta) \mathrm{d}\rho$ 的积分次序.

解：积分区域如图 10－6 所示，则

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} f(\rho,\theta) \mathrm{d}\rho = \int_0^a \mathrm{d}\rho \int_{-\arccos\frac{\rho}{a}}^{\arccos\frac{\rho}{a}} f(\rho,\theta) \mathrm{d}\rho$$

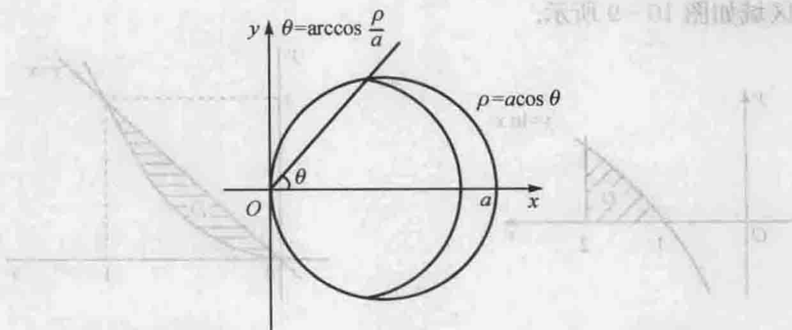


图 10－6

题型 94　选择积分次序

思路启迪：被积函数 $f(x,y)$ 中若含 $\mathrm{e}^{\pm x^2}, \sin x^2, \cos x^2, \mathrm{e}^{\pm\frac{1}{x}}, \sin\frac{1}{x}, \cos\frac{1}{x}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}$，则后对 x 积分；对含变量 y 的类似函数的情形，则后对 y 积分.

例 5 求下列积分:

(1) $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} dxdy$,其中 D 是由直线 $y=x$、$y=1$ 及 y 轴所围成的平面区域.

(2) $\iint\limits_D \frac{e^{xy}}{x^x-1} dxdy$,其中 D 是由 $y=\ln x$、直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面区域.

(3) $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x} dxdy$,其中 D 是由直线 $y=x$ 及曲线 $y=x^2$ 所围成的区域.

解: (1) 积分区域如图 10-7 所示.

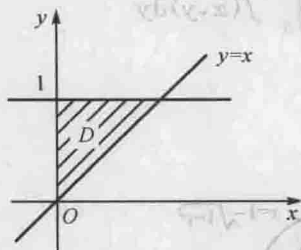


图 10-7

被积函数中含 e^{-y^2},所以应后对 y 积分. 故

$$I = \iint\limits_D x^2 e^{-y^2} dxdy = \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{6}\int_0^1 y^2 e^{-y^2} d(y^2)$$

$$\xlongequal{t=y^2} \frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{6}(-te^{-t}-e^{-t})\Big|_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{3e}$$

(2) 积分区域如图 10-8 所示.

$$I = \iint\limits_D \frac{e^{xy}}{x^x-1} dxdy = \iint\limits_D \frac{e^{xy}}{e^{x\ln x}-1} dxdy = \int_1^2 \frac{1}{e^{x\ln x}-1} dx \int_0^{\ln x} e^{xy} dy$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{e^{x\ln x}-1} \cdot \left(\frac{1}{x}e^{xy}\right)\Big|_0^{\ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{e^{x\ln x}-1} \cdot \frac{e^{x\ln x}-1}{x} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2$$

(3) 积分区域如图 10-9 所示.

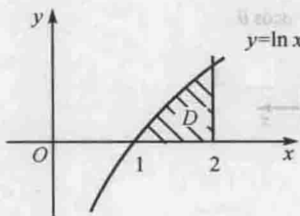


图 10-8

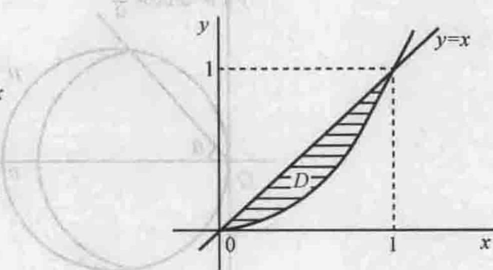


图 10-9

本题就 D 的形状而言,既可选择先对 x 积分,又可选择先对 y 积分,但因为积分 $\int \frac{\sin x}{x} dx$ 不能用初等函数表示,故必须选择先对 y 积分.

$$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x} dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^1 (1-x)\sin x dx = 1-\sin 1$$

例 6 计算下列积分:

(1) $I = \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y} dy$;

(2) $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$.

解：(1) 因为$\int\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$不能用有限形式表示，所以要改变积分次序. 为此，必须先画出积分域D，如图 10 - 10 所示.

$$D_1:\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ \sqrt{x}\leqslant y\leqslant x\end{cases},\ D_2:\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4\\ \sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\end{cases},\ D=D_1\cup D_2$$

$$I=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\left(\cos\frac{\pi}{2}y\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$$

(2) 因为$\int\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$不能用有限形式表示，所以要改变积分次序. 为此，必须先画出积分域D，如图 10 - 11 所示.

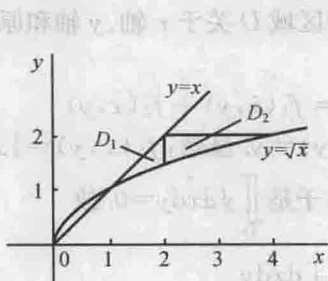


图 10 - 10

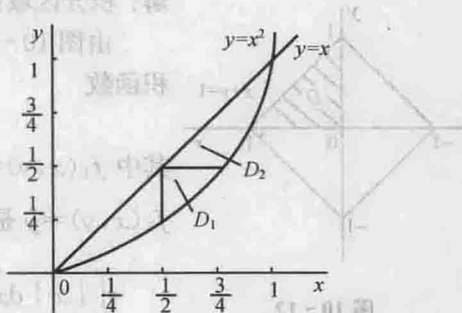


图 10 - 11

$$D_1:\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\\ \frac{1}{4}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\end{cases},\ D_2:\begin{cases}y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\\ \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\end{cases},\ D=D_1\cup D_2$$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^1 x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^1 x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\frac{3\mathrm{e}}{8}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$$

(3) 因为$\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$不能用有限形式表示，而$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\mathrm{d}y$，所以

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_a^b x^y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\quad\text{(更换积分次序)}$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=\ln(1+b)-\ln(1+a)$$

注：矩形区域的累次积分，可以随意更换积分次序，如第(3)小题.

题型 95　积分区域关于坐标轴对称的二重积分

思路启迪：利用二重积分的性质(8).

例 7　设积分区域D是圆环$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，求$\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：因积分域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 关于 x 轴和 y 轴对称，且函数 $2x^3$ 及 $\sin\dfrac{x}{y}$ 分别是 x,y 的奇函数，故将被积函数分项积分，得

$$\iint_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 2x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D 3\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D 7\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=0+0+7\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又由二重积分的几何意义，知 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-\pi=3\pi$. 故

$$\iint_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=7\cdot 3\pi=21\pi$$

例 8 计算 $\iint\limits_D(|x|+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\leqslant 1\right\}$.

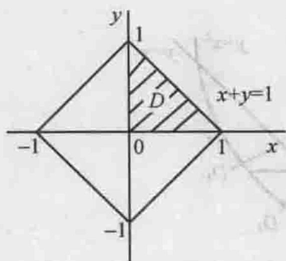


图 10-12

解：积分区域如图 10-12 所示.

由图 10-12 可知，积分区域 D 关于 x 轴、y 轴和原点对称，而被积函数

$$f(x,y)=f_1(x,y)+f_2(x,y)$$

其中 $f_1(x,y)=|x|$，$f_2(x,y)=y$. 显然，$f_1(x,y)=|x|$ 是偶函数，$f_2(x,y)=y$ 是 y 的奇函数，于是 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 故

$$\iint_D |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{D_1}|x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x\mathrm{d}y=4\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

例 9 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{2}$，$x=\sqrt{1+y^2}-\dfrac{1}{2}$ 与直线 $y=-x$ 所围成的区域，D_1 是 D 在第二象限的部分，则 $\iint\limits_D(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( ).

(A) $2\iint\limits_{D_1}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (B) $2\iint\limits_{D_1}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (D) 0

解：作出 D 的图形如图 10-13 所示.

作辅助线 $y=x$，则 D 被分成两个子区域，而每个子区域又被坐标轴分成两个小区域，D_1 与 D_2 关于 y 轴对称，D_3 与 D_4 关于 x 轴对称.

又 $x\sin y$ 关于 x,y 为奇函数，所以

$$\iint_{D_1+D_2}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \iint_{D_3+D_4}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

而 $y\cos x$ 关于 x 为偶函数，关于 y 为奇函数，所以

$$\iint_{D_1+D_2}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \iint_{D_3+D_4}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

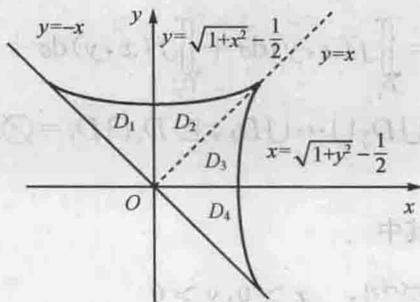


图 10－13

故

$$\iint\limits_D (x\sin y + y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即选(B).

例 10　设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

分析：由于积分区域 D 关于 x 轴对称，故可先利用二重积分的对称性结论简化所求积分，又积分区域为圆域的一部分，则将其化为极坐标系下累次积分即可.

解：积分区域 D 如图 10－14 所示. $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.

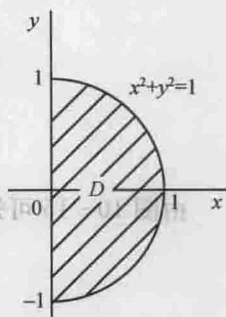


图 10－14

因为区域 D 关于 x 轴对称，函数 $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的偶函数，函数 $g(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的奇函数，则

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho = \frac{\pi\ln 2}{2}$$

$$\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

故

$$\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi\ln 2}{2}$$

题型 96　分段函数的二重积分

思路启迪：当被积函数是分段函数时，应根据分段函数的表达式将积分区域划分为若干个子区域，使得在每个子区域上，被积函数的表达式唯一；然后利用二重积分对积分区域的可加性进行运算：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\cdots+\iint_{D_k} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

其中，$D=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_k$，且 $D_i\cap D_j=\varnothing$.

例 11 计算$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\0, & 其他\end{cases}$$

D 由 $x+y=a,x+y=b,y=0,y=a+b$ $(b>a>0)$所围成.

解： 积分区域如图 10－15 所示.

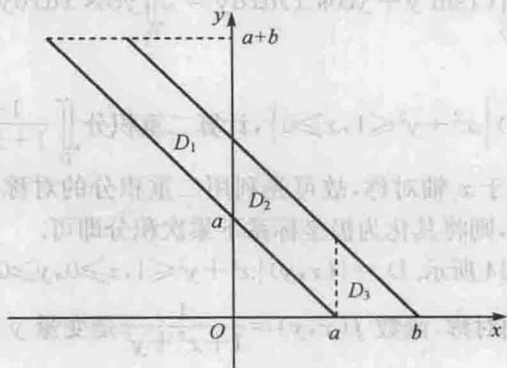


图 10－15

由图 10－15 可知，$D=D_1+D_2+D_3$，在 D_1 上，$f(x,y)=0$，故

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D_2}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^a\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_{a-x}^{b-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y+\int_a^b\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{b-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\\&=(a+1)\mathrm{e}^{-a}-(b+1)\mathrm{e}^{-b}\end{aligned}$$

例 12 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant0,y\geqslant0\}$，$[1+x^2+y^2]$表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数. 计算二重积分$\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

分析： 首先应设法去掉取整函数符号，为此，将积分区域分为两部分.

解： 令

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x^2+y^2<1,x\geqslant0,y\geqslant0\right\}$$

$$D_2=\left\{(x,y)\middle|1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant0,y\geqslant0\right\}$$

则

$$\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$$

例 13 计算 $I = \iint\limits_D \mathrm{sgn}(x^2 - y^2 + 2)dxdy$,其中 $D: x^2 + y^2 \leqslant 4$.

解: 由于积分域关于原点对称,被积函数 $\mathrm{sgn}(x^2 - y^2 + 2)$ 关于 x, y 均为偶函数,如图 10-16 所示,所以

$$I = 4\iint\limits_{D^*} \mathrm{sgn}(x^2 - y^2 + 2)dxdy$$

其中 $D^*: x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

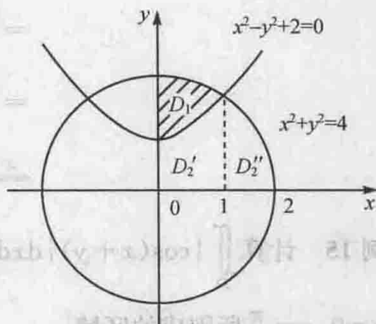


图 10-16

又

$$\mathrm{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = \begin{cases} 1, & x^2 - y^2 + 2 > 0 \\ 0, & x^2 - y^2 + 2 = 0 \\ -1, & x^2 - y^2 + 2 < 0 \end{cases}$$

于是,双曲线 $x^2 - y^2 + 2 = 0$ 将 D^* 分成 $D_1, D_2 = D_2' \cup D_2''$ 两子块,如图 10-14所示,故

$$I = 4\iint\limits_{D_1} \mathrm{sgn}(x^2 - y^2 + 2)dxdy + 4\iint\limits_{D_2'} \mathrm{sgn}(x^2 - y^2 + 2)dxdy + 4\iint\limits_{D_2''} \mathrm{sgn}(x^2 - y^2 + 2)dxdy$$

$$= 4\iint\limits_{D_1} (-1)dxdy + 4\iint\limits_{D_2'} dxdy + 4\iint\limits_{D_2''} dxdy$$

$$= 4\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} (-1)dy + 4\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + 4\int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy$$

$$= -4\int_0^1 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x^2+2})dx + 4\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx + 4\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= \frac{4}{3}\pi + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

题型 97 被积函数 $f(x,y)$ 中含有绝对值符号的二重积分

思路启迪: 在积分域 D 中画出使绝对值符号内式子等于 0 的曲线,将 D 分成若干子域 $D_i(i=1,2,\cdots)$,各子域 D_i 上的绝对值符号即可去掉.

例 14 计算 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$,其中 $D = \left\{(x,y) \middle| -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\right\}$.

解: 令 $y - x^2 = 0$,画出 $y = x^2$,将 D 分成 D_1, D_2 两部分,于是 $D = D_1 \cup D_2$.

$$f(x,y) = \sqrt{|y-x^2|} = \begin{cases} \sqrt{x^2 - y}, & (x,y) \in D_1 \\ \sqrt{y - x^2}, & (x,y) \in D_2 \end{cases}$$

于是

$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy=\iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,dxdy+\iint_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[-\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{x^2}dx+\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{x^2}^{2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}|x|^3dx+\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin t}\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos^4t\,dt=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$$

例 15 计算$\iint_D|\cos(x+y)|dxdy$,其中 D 是由直线 $y=x$, $y=0,x=\frac{\pi}{2}$所围成的区域.

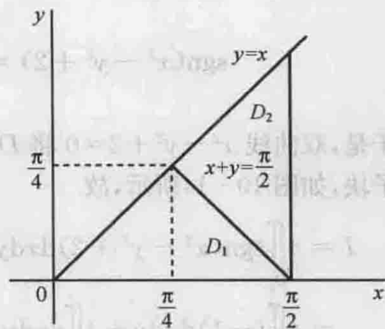


图 10-17

解: 积分区域如图 10-17 所示.

为去掉被积函数中的绝对值,需用 $\cos(x+y)=0$ 的曲线即直线 $x+y=\frac{\pi}{2}$将区域 D 划分为 D_1,D_2 两部分,再将二重积分分别转化为二次积分.

在 D_1 上,$|\cos(x+y)|=\cos(x+y)$;

在 D_2 上,$|\cos(x+y)|=-\cos(x+y)$. 故

$$\iint_D|\cos(x+y)|dxdy=\iint_{D_1}\cos(x+y)dxdy-\iint_{D_2}\cos(x+y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dy\int_y^{\frac{\pi}{2}-y}\cos(x+y)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x}\cos(x+y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin 2y)dy-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-1)dx=\frac{\pi}{2}-1$$

题型 98 被积函数 $f(x,y)$ 中含有最值符号 max 或 min 的二重积分

思路启迪: 利用直线 $y=x$ 将积分域 D 分成两部分,直线上方 $y>x$,直线下方 $y<x$,这样 $f(x,y)$ 中 max 或 min 就消失了.

例 16 计算$\iint_D\sin x\sin y\max\{x,y\}dxdy$,其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\right\}$.

解: 积分区域如图 10-18 所示. 积分域 $D=D_1+D_2$,则

$$\iint_D\sin x\sin y\max\{x,y\}dxdy=\iint_{D_1}y\sin x\sin y\,dxdy+\iint_{D_2}x\sin x\sin y\,dxdy$$

$$= \int_0^\pi y\sin y\mathrm{d}y\int_0^y \sin x\mathrm{d}x + \int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x\int_0^x \sin y\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^\pi y\sin y\mathrm{d}y\int_0^y \sin x\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{2}$$

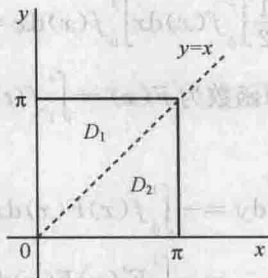


图 10-18

例 17　计算 $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 1\right)$

解: $f(x,y) = \min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, & y \geqslant x \\ y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, & y < x \end{cases}$，于是

$$I = \iint_{y\geqslant x} x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{y<x} y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{y} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x} y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{y} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x^2}\right)\Big|_{-\infty}^{y}\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y^2}\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{令 y=\frac{t}{2}} -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

题型 99　二重积分等式的证明

思路启迪: 常用交换积分次序、变量代换、对称性的方法. 对累次型命题等式的证明，一般采用交换二次积分的积分次序加以证明. 在证题过程中常用到重积分对积分域的可加性和对积分变量的无关性.

例 18　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

证: 方法 1　对左边的积分交换积分次序，应用积分与积分变量所用字母无关，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$$

故

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y + \int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

方法 2 设被积函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，即 $F'(x) = f(x)$ 且 $F(1) = 0$，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y = -\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^1 F'(x)F(x)\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x) = -\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}F^2(0) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

题型 100 二重积分不等式的证明

思路启迪： 常用重积分的估值定理、比较性定理、单调性来证明.

(1) 对于二重积分不等式的证明，常用定理和公式：重积分的性质，尤其是比较和估值定理以及公式 $f^2(x) + g^2(x) \geqslant 2f(x)g(x)$．常用的方法：估值法、判别式法和辅助函数法.

(2) 凡是题设条件中告知被积函数严格单调而没有说明可导的命题，其证明均是从差式出发进行证明.

例 19 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且同为单调增加(或同为单调减少)函数，证明：

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证： 设 $A = (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，现在需证明 $A \geqslant 0$.

现将 A 的表达式转化为二重积分，得

$$A = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{d}y - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(y)\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D [f(x)g(x) - f(x)g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

其中 $D = \left\{(x,y)\,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b\right\}$.

同理可得

$$A=\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y\int_a^b \mathrm{d}x-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
$$=\iint_D f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D [f(y)g(y)-f(y)g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

式(1)+(2)得

$$2A=\iint_D [f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(y)g(y)-f(y)g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 $f(x)$,$g(x)$ 同为单调增加(或同为单调减少)函数,因此,不论 $x>y$,还是 $x<y$,$f(x)-f(y)$ 与 $g(x)-g(y)$ 总是同号,故

$$2A=\iint_D [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$$

即 $A\geqslant 0$.

例 20 设 D:$0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2$,

(1) 求 $A=\iint_D |xy-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续,且 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,$\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,证明:存在 $(\xi,\eta)\in D$,使 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{A}$.

解:(1) 令 $D_0=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\right\}$,有

$$A=\iint_{D_0}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D-D_0}(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\iint_{D_0}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}+2\ln 2$$

(2) 因为 $f(x,y)$ 在 D 上连续,得 $|f(x,y)|$ 在 D 上连续,所以,$|f(x,y)|$ 在 D 上存在最大值,即存在点 $(\xi,\eta)\in D$,使得 $|f(\xi,\eta)|$ 为 $|f(x,y)|$ 在 D 上的最大值.

由已知得

$$1=\left|\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\left|\iint_D (xy-1)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant\iint_D |xy-1|\cdot|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant|f(\xi,\eta)|\iint_D|xy-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|f(\xi,\eta)|\cdot A$$

即存在 $(\xi,\eta)\in D$,使 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{A}$.

10.4* 三重积分

题型 101 三重积分的计算

1. 直角坐标系下三重积分的计算

思路启迪: (1) 适用情况:

若Ω为长方体、四面体或任意形体,则用直角坐标系,此时,体积元素 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(2) 化为累次积分.

根据Ω的具体形状,确定Ω在哪个坐标面的投影.

① 若平行于某坐标轴(不妨设为z轴)的直线穿过Ω的内部,与Ω的边界曲面的交点不多于两个,Ω的上顶曲面函数为$z_2(x,y)$,下顶曲面函数为$z_1(x,y)$,在xOy坐标面的投影区域为D,即Ω可表示为$\begin{cases}z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\\(x,y)\in D\end{cases}$,则先对$z$积分,然后对$x,y$积分.故

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{1}$$

式(1)称为计算三重积分的“先一后二”法.

在求二重积分时,

(ⅰ) 若D为X型区域,即$\begin{cases}y_1(x)<y<y_2(x)\\a<x<b\end{cases}$,则式(1)可进一步化为

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{2}$$

(ⅱ) 若D为Y型区域,即$\begin{cases}x_1(y)<x<x_2(y)\\c<y<d\end{cases}$,则式(1)可进一步化为

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\mathrm{d}x\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

式(2)和式(3)即为计算三重积分的三次积分.

② 若Ω可表示为$\begin{cases}(x,y)\in D_z\\c_1\leqslant z\leqslant c_2\end{cases}$,则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

式(4)称为计算三重积分的“先二后一”法或截面法. 当被积函数与 x,y 无关且积分域 Ω 夹于两平面 $z=c_1, z=c_2 (c_1<c_2)$ 之间，用界于两平面的平面去截 Ω 得截面 $D(z)$，积分 $\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 容易计算时，用截面法比较简单.

③ 将 Ω 投影于 yOz 和 zOx 坐标面的情况类似处理.

④ 如果平行于坐标轴，穿过 Ω 的内部的直线交 Ω 的边界曲面的点多于两个，则将 Ω 分割成若干不相交的闭区域，使每个小闭区域满足条件(即平行于坐标轴，穿过每个小闭区域的内部的直线交其边界曲面的点不多于两个)，然后利用三重积分的性质，将积分区域 Ω 上的三重积分分解为各小闭区域上的三重积分之和.

例 21 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的区域.

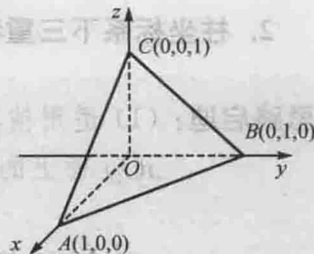


图 10-19

解: Ω 的草图如图 10-19 所示.

因为被积函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 及积分域关于 x,y,z 均为对称，故

$$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

所以 $I=3\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

将 Ω 投影到 xOy 坐标面上，则

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y\leqslant 1\right\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\right\}$$

于是

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant z\leqslant 1-x-y\\(x,y)\in D\end{cases}=\begin{cases}0\leqslant z\leqslant 1-x-y\\0\leqslant y\leqslant 1-x\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\quad(\text{先一后二法})$$

故

$$I=3\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z=3\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x-y)^2\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$$

例 22 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 围成.

解: 因为被积函数与 x,y 无关，考虑用“先二后一”法.

由于 $\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\dfrac{z^2}{c^2}\\-c\leqslant z\leqslant c\end{cases}$，所以

$$I=\int_{-c}^{c}z^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-c}^{c}z^2\cdot\pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi ab\int_0^c z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

例 23 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由曲线 $y^2=2z,x=0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2,z=8$ 所围成的立体.

解： 曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面的方程为 $x^2+y^2=2z$.

设 $2\leqslant z\leqslant 8$，则 $D(z):x^2+y^2\leqslant 2z$. 虽然 $f(x,y,z)=x^2+y^2$ 不易写成 z 的函数，但 $\iint\limits_{D(z)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 易用极坐标写成 z 的函数，故用"先二后一"法计算：

$$I=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_2^8 z^2\mathrm{d}z=336\pi$$

2. 柱坐标系下三重积分的计算

思路启迪： (1) 适用情况：若 Ω 是由旋转面、柱面、锥面与平面所围，积分域 Ω 在 xOy 面上的投影是圆或圆的一部分，或被积函数为 $zf(x^2+y^2)$，$zf\left(\frac{y}{x}\right)$ 或简单的一、二次式，则用柱面坐标系 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\z=z\end{cases}$，此时，体积元素 $\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

(2) 柱面坐标系下三重积分的计算本质是直角坐标系下的"先一后二"法，即若

$\Omega:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta),z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_1(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_2(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\mathrm{d}z$$

例 24 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围第一卦限部分。

解： $\Omega:\begin{cases}0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\\(x,y)\in D\end{cases}\xrightarrow{\text{先一后二}}\begin{cases}0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\\0\leqslant\rho\leqslant 1\\0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$

故

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz = \iint\limits_{D} xy\,dxdy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz = \iint\limits_{D} xy \cdot \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 \rho\cos\theta \cdot \rho\sin\theta \cdot (1-\rho^2) \cdot \rho d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1 (\rho^3-\rho^5)\,d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{48}$$

例 25　计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，$\Omega$ 由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$，$z=x^2+y^2$ 围成.

解：凡积分域是由抛物面与其他曲面所围成的形体，一般采用柱坐标系计算为宜. 在柱坐标系下，球面与抛物面的交线为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-\rho^2} \\ z=\rho^2 \end{cases}$，即 $\begin{cases} z=1 \\ \rho=1 \end{cases}$.

于是 Ω：$\begin{cases} \rho^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-\rho^2} \\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$，所以

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z\,dz$$

$$= \pi\int_0^1 (2\rho-\rho^3-\rho^5)\,d\rho = \pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{7\pi}{12}$$

另解：因为被积函数与 x,y 无关，也可用"先二后一"法. 由于

$$\Omega: \begin{cases} (x,y) \in D_{z_1}: x^2+y^2 \leqslant z \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \end{cases} + \begin{cases} (x,y) \in D_{z_2}: x^2+y^2 \leqslant 2-z^2 \\ 1 \leqslant z \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$$

所以

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz = \int_0^{\sqrt{2}} z\,dz\iint\limits_{D_z} dxdy = \int_0^1 z\,dz\iint\limits_{D_{z_1}} dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} z\,dz\iint\limits_{D_{z_2}} dxdy$$

$$= \int_0^1 z \cdot \pi \cdot z\,dz + \int_1^{\sqrt{2}} z \cdot \pi \cdot (2-z^2)\,dz = \frac{7\pi}{12}$$

注：显然用柱坐标系更简便.

3. 球坐标系下三重积分的计算

思路启迪：(1) 适用情况：若 Ω 是由锥面、球面与平面所围，或被积函数为 $f(x^2+y^2+z^2)$，则用球面坐标系 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，此时，体积元素 $dv = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$.

(2) 积分次序：通常是先对 r 积分，把区域 Ω 投影到 $r=1$（或常数）的球面上，得到投影区域 $\sigma_{\varphi\theta}$，它的边界曲线由 φ,θ 的关系确定. 从

原点引一条射线，穿过Ω内部，设先与之相交的曲面方程为$r_1(\varphi,\theta)$，后与之相交的曲面方程为$r_2(\varphi,\theta)$，则

$$\Omega:\begin{cases} r_1(\varphi,\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi,\theta) \\ (\varphi,\theta)\in\sigma_{\varphi\theta} \end{cases}$$

故积分可表示为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\sigma_{\varphi\theta}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r,\varphi,\theta)r^2\mathrm{d}r$$

$$=\int_?^?\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_?^?\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r,\varphi,\theta)r^2\mathrm{d}r$$

关于第一个积分$\int_?^?\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$，积分限这样确定：

① 若z轴从积分域Ω中穿过，则$\int_?^?\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$.

② 若z轴与积分域Ω相离或相切，则总可以找到两个半锥角分别为α，$\beta(\alpha<\beta)$的锥面，把Ω夹在其中，于是

$$\int_?^?\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

关于第二个积分$\int_?^?\mathrm{d}\theta$，积分限的确定与极坐标系中θ的确定类似，即若积分域Ω在平面xOy上投影后区域的边界曲线包含原点在内，则$\int_?^?\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$；若投影区域的边界曲线不包含原点在内，则在$xOy$面上总可以作两条射线把投影区域夹住，若射线与$x$轴正向的夹角分别为$\theta_1,\theta_2(\theta_1<\theta_2)$，则$\int_?^?\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta$.

例 26 求$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}}\mathrm{d}V$，$\Omega$为$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$的第一卦限部分.

解： 本题显然用球坐标系，则$\Omega:\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant a \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2} \\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sin\varphi\cos\theta\cdot\mathrm{e}^{\frac{r^2}{a^2}}\cdot r^2\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{e}^{\frac{r^2}{a^2}}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^a r^2\mathrm{e}^{\frac{r^2}{a^2}}\mathrm{d}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)=\frac{\pi}{8}a^4$$

例 27 求 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成.

解: $z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$，$z=1 \Rightarrow r\cos\varphi=1 \Rightarrow r=\frac{1}{\cos\varphi}$

于是

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant \frac{1}{\cos\varphi}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

故

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r\cdot r^2\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4\varphi}\mathrm{d}(\cos\varphi)=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{\cos^3\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$$

注: 用球面坐标系计算，应将所有曲面化为球坐标方程.

例 28 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$，$\Omega$ 由 $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$，$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 围成.

解: 从被积函数看，似乎柱坐标系简单；但从积分域分析，本题宜采用球坐标系. 因此

$$\Omega:\begin{cases}1\leqslant r\leqslant 2\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

故

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\cos\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^5\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\sin^4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{6}r^6\Big|_1^2=\frac{21}{16}\pi$$

题型 102 利用对称性化简三重积分

思路启迪: (1) 若积分域 Ω 关于坐标面 xOy（或 yOz，或 zOx）对称，$f(x,y,z)$ 是 z（或 x，或 y）的奇函数，则积分 $I=0$；若 $f(x,y,z)$ 是 z（或 x，或 y）的偶函数，则积分

$$I=2\iiint\limits_{\Omega^*} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

其中 Ω^* 是 Ω 的对称区域的一半.

(2) 若积分域 Ω 关于 x（或 y，或 z）轴对称，$f(x,y,z)$ 是 y,z（或 x,z，或 x,y）的奇函数，则积分 $I=0$；若 $f(x,y,z)$ 是 y,z（或 x,z，或 x,y）

的偶函数,则积分

$$I = 2\iiint\limits_{\Omega^*} f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

其中 Ω^* 是 Ω 的对称区域的一半.

(3) 若积分域 Ω 关于原点对称, $f(x,y,z)$ 关于 x,y,z 为奇函数(即 $f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$),则积分 $I=0$;若 $f(x,y,z)$ 关于 x,y,z 为偶函数(即 $f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$),则积分

$$I = 2\iiint\limits_{\Omega^*} f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

其中 Ω^* 是 Ω 的对称区域的一半.

例 29 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

解: 由图 10 - 20 可知, Ω 关于坐标面 yOz 对称,又 $f(x,y,z)=x$ 关于 x 为奇函数,于是

$$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}V = 0$$

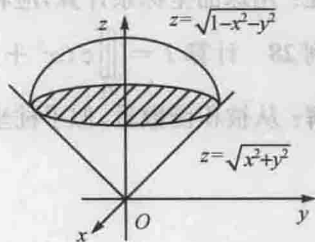


图 10 - 20

故

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$

例 30 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V$,其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 围成.

解:

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$$

因 Ω: $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 关于原点对称,又 $f(x,y,z)=x$, $f(x,y,z)=y$, $f(x,y,z)=z$ 分别为 x,y,z 的奇函数,所以

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V=0+0+0=0$$

题型 103 利用轮换对称性化简三重积分

思路启迪: 当积分区域 Ω 或被积函数表达式中将变量 $x,y,z\rightarrow z,x,y$,表达式仍不变,则称积分域或被积函数关于变量 x,y,z 具有轮换对称性,此时积分有如下性质:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} f(y)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}V$$

例 31　计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}V$，其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 围成.

解：因为 $f(x,y,z)=(x+y+z)^2$ 及 Ω 均具有轮换对称性，所以

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+2\iiint\limits_{\Omega}(xy+yz+zx)\mathrm{d}V$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V+6\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V$$

而 $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V=0$，所以

$$I=3\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V=8\times3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\sin\varphi\cdot r^2\cos^2\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi R^5$$

10.5* 重积分的应用

题型 104　求体积

思路启迪：(1) 利用二重积分的几何意义. $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示由曲面 $\Sigma:z=f(x,y)$ 为顶，母线 // z 轴的柱面，即曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影 D 为底所围的形体体积 V，即

$$V=\iint\limits_{D}z\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

(2) 利用三重积分计算：$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$ 即为 Ω 的体积.

例 32　求球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的(含在圆柱面内的部分)立体的体积.

解：由对称性，立体体积为第一卦限部分的 4 倍

$$V=4\iint\limits_{D}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 为半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 及 x 轴所围成的闭区域.

在极坐标系中，D 可表示为

$$0\leqslant\rho\leqslant2a\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

于是

$$V=4\iint\limits_{D}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{32}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{32}{3}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

例 33 求曲面 $z = x^2 + y^2 + a\ (a > 0)$ 上任意一点处的切平面与 $z = x^2 + y^2$ 所围成的空间的体积.

解: 设曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2 + a$ 上任意一点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，则过点 M_0 的切平面方程为

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

即
$$z = 2x_0 x + 2y_0 y - x_0^2 - y_0^2 + a$$

故

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leqslant a} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - a]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $x - x_0 = \rho\cos\theta, y - y_0 = \rho\sin\theta$，则

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{a}} \rho \cdot (-\rho^2 + a)\ \mathrm{d}\rho = \pi a^2 .$$

题型 105 求曲面的面积

思路启迪: 关键是找被积函数和投影区域. 一般被积函数在第一个曲面方程中找,投影区域为两个曲面共同投影部分. 请记住以下公式:

(1) 设曲面 $\Sigma: z = z(x, y)$ 与平行于 z 轴的直线只交于一点,曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影为 D，则曲面 Σ 的面积 A 为

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 如果曲面 $\Sigma: y = y(x, z)$ 与平行于 y 轴的直线只交于一点,曲面 Σ 在 zOx 平面上的投影为 D，则曲面 Σ 的面积 A 为

$$A = \iint_D \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

(3) 如果曲面 $\Sigma: x = x(y, z)$ 与平行于 x 轴的直线只交于一点,曲面 Σ 在 yOz 平面上的投影为 D，则曲面 Σ 的面积 A 为

$$A = \iint_D \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例 34 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积.

解: 将割下部分的曲面在 xOy 平面上投影,联立 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z^2 = 2x \end{cases}$，消去 z 得 $x^2 + y^2 = 2x$.

故投影为 $\begin{cases}x^2+y^2=2x\\z=0\end{cases}$.

又
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

于是
$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\pi$$

题型106　求薄片或形体的质量、质心的坐标、转动惯量、引力

思路启迪：记住以下求解公式：

(1) 设平面薄片 D 的面密度 $\mu=f(x,y)$，则

① 薄片 D 的质量
$$M=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

② 薄片 D 的重心(质心)
$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma},\ \bar{y}=\frac{\iint\limits_D yf(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma}$$

③ 薄片 D 关于 x,y 轴及关于原点的转动惯量分别为
$$J_x=\iint\limits_D y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$J_y=\iint\limits_D x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$J_0=\iint\limits_D (x^2+y^2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 设空间形体体密度为 $\rho(x,y,z)$，则

① 空间形体 Ω 的质量
$$M=\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

② 空间形体 Ω 的重心(质心)
$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

$$\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

③ 空间形体 Ω 关于 x,y,z 轴及关于原点的转动惯量分别为

$$J_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$J_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$J_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$J_0=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例 35 设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上的一个定点，球体上任意一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比(比例常数 $k>0$)，求球体的重心位置.

解: 设所考虑的球体为 Ω，球心为 O_1，以定点 P_0 为原点，射线 P_0O_1 为正 z 轴建立直角坐标系，则球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=2Rz$$

设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$，则

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} kz(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}$$

而

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^2\cdot\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^3\cos\varphi\cdot\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{8}{3}\pi R^6$$

故 $\bar{z}=\frac{5}{4}R$.

第 11 章* 无穷级数

●重要定理、公式和结论

11.1 基本性质

(1) 设 $C \neq 0$ 为常数,则 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同的敛散性.

注: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和为 s,则 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 也收敛,且其和为 Cs.

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$.

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散;

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 敛散性要具体分析.

(3) 设有一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,对其添加或去掉有限项,不影响其敛散性;若收敛,其和可能改变.

(4) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则对其各项任意加括号后所得新级数也收敛,其和不变.

推论: ① 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,对其各项加括号后所得级数发散,则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

② 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,对其各项加括号后所得级数收敛,则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性要做具体分析.

(5) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件:$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

必要条件的应用:判别级数发散,即 $n \to \infty, u_n \not\to 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如:$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 2n + 5}, u_n \to \frac{2}{3}\ (n \to \infty)$,则级数发散.

11.2 级数的判敛法

1. 正项级数判敛法

(1) 比较判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数,对于常数 $C > 0$,恒有 $u_n \leqslant Cv_n$,则

① 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

② 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

简言之，正项级数小于收敛级数者必收敛，大于发散级数者必发散.

(2) 比较判别法的极限形式　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$，那么

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，$0\leqslant A<+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，$0<A\leqslant+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

由以上可得两个简捷的判别法：

① 当 $n\to\infty, u_n\sim v_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性；

② 设 p,q 分别为通项 u_n 的分母、分子关于 n 的最高次数，当 $p-q>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $p-q\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

常用的比较级数如下：

① 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

当 $|r|<1$ 时，级数收敛，其和为 $\frac{a}{1-r}$；当 $|r|>1$ 时，级数发散.

② p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$

当 $p>1$ 时，级数收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，级数发散.

(3) 比值判别法　设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则当 $\rho<1$ 时，级数收敛；当 $\rho>1$ 时，级数发散；当 $\rho=1$ 时，方法失效.

适用范围：通项 u_n 中含有 $n!$ 或关于 n 的若干因子连乘积形式.

(4) 根值判别法　设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则当 $\rho<1$ 时，级数收敛；当 $\rho>1$ 时，级数发散；当 $\rho=1$ 时，方法失效.

适用范围：通项 u_n 中含有以 n 为指数的因子. 但是当 u_n 中既含有以 n 为指数，又含有 $n!$，$(2n)!$，$(2n+1)!$ 时，用比值法，而不用根值法判别.

2. 交错级数判敛法

莱布尼茨交错级数判别准则：

设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0$，若满足条件：

① $u_n\geqslant u_{n+1}, n=1,2,\cdots$，即 u_n 单减；

② $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛,其和 $s \leqslant u_1$,其 n 项余和的绝对值 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

注: 使用莱布尼茨判别法判别交错级数是否收敛时,必须验证两个条件:一是验证 $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$,一般较为容易;二是验证 $u_{n+1} \leqslant u_n, n = 1,2,\cdots$,有时较为困难,常用以下三种方法:

① 比值法,考查 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 是否小于1;

② 差值法,考查 $u_n - u_{n+1}$ 是否大于0;

③ 考查函数 u_x(将 n 换成 x)对 x 的导数是否小于0.

3. 任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$(u_n 可正、可负、可0)

定义 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为绝对收敛级数;若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛级数.

定理1 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定收敛.

定理2 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛,则其所有正项和负项各自构成的两个级数一定是发散的.

注: 用比值法或根值法判别 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散.

常用的条件收敛级数如下:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}},\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n},\text{等等.}$$

11.3 幂级数

1. 阿贝尔定理

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x = x_0(\neq 0)$ 处收敛,则对于满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛;设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x = x_0(\neq 0)$ 发散,则对于满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散.

2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 收敛半径的计算

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的系数满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$$

则收敛半径为

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty \\ +\infty, & \rho=0 \\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$$

注:若已知幂级数在 (a,b) 内收敛,在 $[a,b]$ 外发散,则其收敛半径为 $\frac{b-a}{2}$.

3. 幂级数的分析性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R ,则

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续;

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 内可逐项微分,即

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

(3) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 内可逐项积分,即

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

4. 函数的幂级数展开

泰勒级数 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内具有任意阶导数,则 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 称为 n 阶泰勒系数.

$$f(x)\sim f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

若 $x_0=0$,则

$$f(x)\sim f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为麦克劳林级数.

泰勒定理 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内具有任意阶导数,则泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 收敛于 $f(x)$ 的充要条件是:$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$,其中

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

11.4 七个常见的函数展开式(必须熟记)

(1) $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u^n,\quad u\in(-1,1)$;

(2) $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots+(-1)^nu^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nu^n,\quad u\in(-1,1)$;

(3) $\mathrm{e}^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\cdots+\frac{1}{n!}u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}u^n,\quad u\in(-\infty,+\infty)$;

(4) $\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$u \in (-\infty, +\infty)$；

(5) $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$，$u \in (-\infty, +\infty)$；

(6) $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}$，$u \in (-1, 1]$；

(7) $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + \cdots$，$u \in (-1,1)$（$u$ 可否为 -1 或 1 与 α 有关）.

●核心题型及思路启迪

11.5 与级数概念和性质相关的命题

题型 107 判别数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性，并附有“若收敛时，求其和”的命题

思路启迪： 一般利用级数敛散性的定义处理. 求数项级数的和，就是求 $\lim_{n\to\infty} S_n$，将 S_n 化为易于求极限的表达式. 常用方法如下：

(1) 将一般项(或通项) u_n 拆成两项差：$u_n = v_{n+1} - v_n$，然后写出前 n 项和

$$S_n = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \cdots + (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_1$$

从而求得极限 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(v_{n+1} - v_1)$，即级数的和.

(2) 利用几何级数求和公式求和.

例 1 判别下列级数的敛散性，收敛时求其和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

解： (1) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$，则 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - 1)$ 不存在，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散.

(2) $u_n = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$，则

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \to 1\ (n \to \infty)$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 收敛，且和为 1.

(3) $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，则

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\dfrac{1}{4}$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{4}$.

题型 108　利用级数敛散性的定义及性质，判断级数的敛散性

思路启迪：(1) 判断极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是否存在(当 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 难以判断时，也可判断 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$ 是否同时存在并且相等，若存在且相等，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在)，从而确定级数的敛散性.

(2) 利用已知级数的敛散性和级数的性质，来判断级数的敛散性，常见题型为单项选择题，大致有两类：

① 利用无穷级数的性质及其派生的结论：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$ 均收敛，作分析处理；另外，举反例排除法也是很重要的一种方法.

② 任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（$a_n$ 可正，可负，可 0)敛散性的判别，通常将通项取绝对值 $|a_n|$，然后利用不等式放缩法.

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 或不存在，则级数发散.

例 2　判断级数 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}+\cdots$ 的敛散性，若收敛，则求其和.

解：因为该级数的前 $2n$ 项和与前 $2n+1$ 项和分别为

$$S_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$$

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \dfrac{3}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$，故原级数收敛，且其和为 $\dfrac{3}{2}$.

例 3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数（ ）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛 (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

解： 由级数的性质，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 也收敛，故可知选(D).

例 4 下列各选项正确的是（ ）.

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $u_n \geqslant v_n (n = 1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛

解： 因为

$$(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n \leqslant u_n^2 + v_n^2 + (u_n^2 + v_n^2) = 2(u_n^2 + v_n^2)$$

所以，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛. 故选(A).

例 5 设常数 $\lambda > 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$（ ）.

(A)发散 (B)条件收敛 (C)绝对收敛 (D)敛散性与 λ 有关

解：

$$|u_n| = \left| (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right| = \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} < \frac{|a_n|}{n} < \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 都收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，故选(C).

11.6 级数敛散性的判别

题型 109 正项级数敛散性的判别

思路启迪： 判敛程序如下：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 或不存在，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则进入下一步.

(2) 根据通项 u_n 的特点选择适当的判别法.

① 若通项 u_n 中含有 $n!$ 或关于 n 的若干因子连乘积形式,则用比值法($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$,当 $\rho<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;当 $\rho>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散).

② 若通项 u_n 中含有以 n 为指数的因子,则用根值法($\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$,当 $\rho<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;当 $\rho>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散). 但是当 u_n 中既含有以 n 为指数的因子,又含有 $n!$,$(2n)!$,$(2n+1)!$ 时,则用比值法,而不用根值法判别.

(3) 当 $\rho=1$ 时,即当比值法、根值法都失效时,可用正项级数的比较判别法或其极限形式来判别.

用比较法判别敛散性时,常用下列不等式:

① $\sqrt{n}>\ln n$ 或 $n>\ln n$ (n 为自然数);

② $a^2+b^2\geqslant 2ab$ ($a\geqslant 0,b\geqslant 0$);

③ $x>\ln(1+x)$ ($x>-1$).

例 6 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ $(a,b>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$.

解: (1)因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot\sqrt[n]{n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}=1\neq 0$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ 发散.

(2)因为通项 u_n 中含有 n 个因子连乘积与商形式,所以用比值判别法.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots[(n+1)a+1]}{(b+1)(2b+1)\cdots[(n+1)b+1]}\cdot\frac{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1}=\frac{a}{b}\end{aligned}$$

所以 当 $\frac{a}{b}<1$，即 $a<b$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

当 $\frac{a}{b}>1$，即 $a>b$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

当 $\frac{a}{b}=1$，即 $a=b$ 时，级数 $\lim_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

故当 $a<b$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $a\geqslant b$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(3)因为通项 u_n 中含有阶乘，又含有以 n 为指数幂的因子，则用比值判别法.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4) 因为通项 u_n 中含有以 n 为指数幂的因子，所以用根值法.

因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}}=\frac{1}{2}<1$，故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

本题也可用比较法的一般形式.

因为 $u_n=\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，故原级数收敛.

(5) 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho=1$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho=1$，所以用比较判别法(极限形式).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}-p}}$$

当 $p<\frac{4}{3}$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}-p}}=0$；取 $p=\frac{7}{6}$，因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛.

注：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 还有两种更简单的判别形式：

(1) 若当 $n\to\infty$ 时，$u_n\sim v_n$，即 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n\geqslant 0)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n\ (v_n\geqslant 0)$ 有相同的敛散性.

(2) 若 p,q 分别为通项的分母、分子关于 n 的最高次数，故

① 如果 $p-q>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

② 如果 $p-q\leqslant 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ (x 为任意实数)；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；

(3) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\cdots+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}+\cdots$.

解: (1) $u_n=\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\quad(n\to\infty)$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, $\frac{x^2}{2}$ 为非负实数,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 收敛.

(2) $u_n=4^n\sin\frac{\pi}{3^n}\sim4^n\cdot\frac{\pi}{3^n}=\pi\left(\frac{4}{3}\right)^n\quad(n\to\infty)$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 发散.

(3) $\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{4}$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=2\sin\frac{\pi}{2^3}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^3}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{2^3}\right)}=2\sin\frac{\pi}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\sim2\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{\pi}{2^n}\quad(n\to\infty)$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛,所以原级数收敛.

例 8 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+3n-1}{n^2(\sqrt{2n^2+n+1}-2)}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$.

解: (1) $p=3,q=\frac{3}{2},p-q=\frac{3}{2}<1$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+3n-1}{n^2(\sqrt{2n^2+n+1}-2)}$ 收敛.

(2) $p=n+2,q=n+1,p-q=1$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$ 发散.

题型 110 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\quad(u_n>0)$敛散性的判别

思路启迪: (1)首先考虑是否满足莱布尼茨判敛准则:

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$,若满足条件:

① $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,即 u_n 单减;

② $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，其和 $s\leqslant u_1$，其 n 项余和的绝对值 $|R_n|\leqslant u_{n+1}$.

(2) 或者将 u_n 拆成若干项，分别对各项构成的交错级数分析处理.

例 9 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

解： (1) 由 $u_n=\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$ 联想到函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

因为

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}(1+x)-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}<0\text{（当 }x\text{ 取足够大的正数时）}$$

所以 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ 单调减少，于是 $u_n\geqslant u_{n+1}$，又

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{1+n}=0$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$ 收敛.

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}+\cdots$

① 当 n 为奇数时，$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$，$u_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}$，所以

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}-1}>\frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}+1}>1$$

即 $u_n\geqslant u_{n+1}$.

② 当 n 为偶数时，$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$，$u_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1}$，所以

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}+1}=\frac{n}{\sqrt{n}+1(\sqrt{n+1}+1)}<\frac{n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}=1$$

即 $u_n<u_{n+1}$.

由情况①，②可知，该级数不满足莱布尼茨判敛准则条件①，所以不能用该准则判别.

下面试用拆分法：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-1}$$

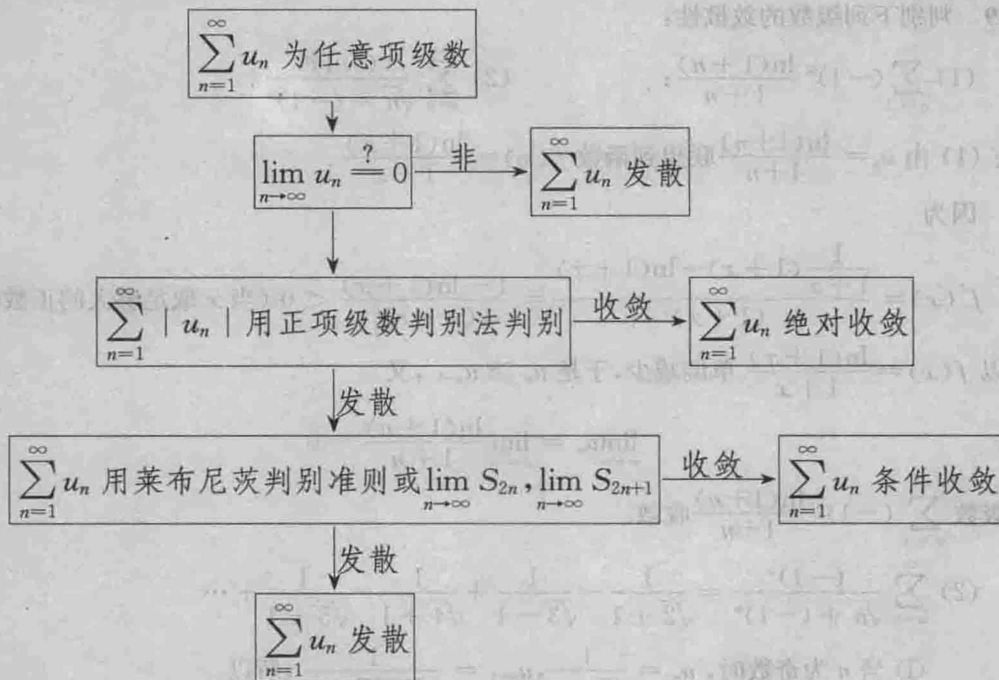
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}-1}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n}$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 发散.

题型 111　任意项级数敛散性的判别

思路启迪： 判敛程序如下：



具体如下：

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 或不存在，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；若 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则进入下一步.

(2) 首先用正项级数判别法，判别 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的敛散性. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且为绝对收敛；若用比值法或根值法判定 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(3) 若用比较法判定 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性需进一步判定.

① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为交错级数，且满足莱布尼茨判别准则的条件，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛.

② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 不是交错级数或虽为交错级数，但不满足莱布尼茨准则的条件，则

（ⅰ）用级数敛散性定义，若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，则级数条件收敛.

（ⅱ）当 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在性难以判断时，常用方法是判断 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$ 是否存在且相等. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$（为有限常数），则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛；若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$ 两者之一不存在，或都存在但不相等，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

（ⅲ）若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$、$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$ 都难以判断，则可利用泰勒公式或级数的性质判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.

例 10 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

解：(1) $0<\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx<\int_n^{n+1}e^{-x}dx=\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{e^n}$

则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}$ 收敛可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$ 绝对收敛.

(2) $\left|(-1)^n\frac{1}{n^p}\right|=\frac{1}{n^p}$，对参数 p 进行讨论，令 $u_n=\frac{1}{n^p}$，则

① 当 $p<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$，故原级数发散；

② 当 $p=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$，故原级数也发散；

③ 当 $0<p\leqslant1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，但

$$u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^p}<\frac{1}{n^p}=u_n,\ \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$$

所以该级数满足莱布尼茨判别准则的条件，故原级数为条件收敛；

④ 当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故原级数为绝对收敛.

(3) 因为

$$u_n=\sin[(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)+n\pi]=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)$$

$$=(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$$

所以原级数是交错级数.

当 $n\to\infty$ 时，

$$\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\sim\frac{\pi a^2}{2n}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi a^2}{2n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right|$ 发散.

又当 n 充分大时，$0<\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}>0$，且单调减少

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}=0$$

故由莱布尼茨判别准则，原级数收敛，且为条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 发散，故原级数不绝对收敛.

此级数为交错级数，但不满足莱布尼茨判别准则中单调性的条件，可用敛散性的定义或泰勒公式及级数的性质来判别.

方法1 用敛散性的定义来判别.

$$S_{2n}=\left(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

上式括号中各项均小于零，故单调减少.

又

$$S_{2n}=\left(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$>\left(\frac{1}{\sqrt4}-\frac{1}{\sqrt2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt6}-\frac{1}{\sqrt4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}>-\frac{1}{\sqrt2}$$

即 S_{2n} 有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 存在，不妨设其极限值为 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$. 又

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=S+0=S$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，所以原级数收敛，且为条件收敛.

方法 2 利用泰勒公式及级数的性质来判别.

由泰勒公式 $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x)$ 得

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1+(-1)^n\frac{1}{n}\right]^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n^3}}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)
\end{aligned}
$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n^3}}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 绝对收敛，故原级数条件收敛.

题型 112 有关数项级数敛散性的证明

思路启迪： 多用比较判别法，慎用正项级数的比值法与根值法.

(1) 若欲证明的级数没有说明是什么级数，则一般将其化为正项级数处理；

(2) 给出数列 $\{a_n\}$，欲证明其收敛，通常用敛散性的定义来证；

(3) 交错级数，用莱氏准则或分别计算 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$，则收敛，否则发散.

例 11 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{u_n}{n}\right|$ 收敛.

分析： 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，要证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{u_n}{n}\right|$ 收敛，设法将 $\left|\frac{u_n}{n}\right|$ 与 u_n^2 联系起来，很容易想到不等式 $2\left|\frac{u_n}{n}\right|\leqslant u_n^2+\frac{1}{n^2}$.

证： 因为

$$
\left|\frac{u_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n^2+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{u_n^2}{2}+\frac{1}{2n^2}
$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n^2}{2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 都收敛，故由比较法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{u_n}{n}\right|$ 收敛.

例 12 设 $a_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，证明：级数

$$
\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n| \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|
$$

同时收敛或同时发散.

证： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，所以

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}-a_n|}{\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}|a_na_{n+1}|=a^2\neq 0
$$

根据比较判别法的极限形式，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|$ 同时收敛或同时发散.

例 13　已知数列 $\{na_n\}$ 收敛，级数 $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 也收敛，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证：设 $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$
\begin{aligned}
S_n &= 2(a_2 - a_1) + 3(a_3 - a_2) + \cdots + n(a_n - a_{n-1}) + (n+1)(a_{n+1} - a_n) \\
&= (n+1)a_{n+1} - a_1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\
&= (n+1)a_{n+1} - a_1 - \sigma_n
\end{aligned}
$$

其中 σ_n 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和，于是 $\sigma_n = (n+1)a_{n+1} - a_1 - S_n$.

因为 $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛，可设其和为 S，即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$；又数列 $\{na_n\}$ 收敛，可设 $\lim_{n\to\infty} na_n = A$，故极限 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = A - a_1 - S$ 存在，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

例 14　设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$　$(n = 1,2,\cdots)$，证明：

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在；　　(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 收敛.

证：(1) 显然 $a_n \geqslant 0$　$(n = 1,2,3,\cdots)$，由于

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - a_n = \frac{1 - a_n^2}{2a_n}$$

而

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1$$

于是 $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$，故数列 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界，所以 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在.

(2) 由于数列 $\{a_n\}$ 单调减少，所以有

$$0 \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leqslant a_n - a_{n+1}$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 的前 n 项部分和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

又极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在，所以，极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 收敛，则由正项级数的比较判别法得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 收敛.

例 15　设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$.

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值；

(2) 试证:对任意的常数 $\lambda>0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

解: (1) 因为

$$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

(2) 显然 $a_n>0$,于是有

$$a_n<a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

所以 $\frac{a_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛($\lambda+1>1$),由比较判别法得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

题型 113 给出函数 $f(x)$ 的某种条件,形如 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 的级数的敛散性的证明

思路启迪: 对给出的条件进行充分挖掘,然后利用定义或正项级数的比较判别法进行分析.

例 16 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证: 由题设可知,$f''(x)$ 在 $x=0$ 邻域内连续,于是存在一正实数 $M>0$,使得在该邻域内有 $|f''(x)|\leqslant M$.

又由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可得 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$,取导数为

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶泰勒展开,可得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=\frac{f''(\xi)}{2}x^2,\quad 0<\xi<x$$

于是有

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{2}x^2,\ \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

例 17 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内连续,且 $f(0)=1$,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

证: 由题设 $f(x)=f(-x)$, $f'(x)=-f'(-x)$.

令 $x=0$,则有 $f'(0)=-f'(0)$,得 $f'(0)=0$.

又 $f''(x)$ 在 $x=0$ 邻域内连续,于是存在一正实数 $M>0$,使得在该邻域内有

$$|f''(x)| \leqslant M$$

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶泰勒展开,可得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=1+\frac{f''(\xi)}{2}x^2,\ 0<\xi<x$$

于是有

$$|f(x)-1| \leqslant \frac{M}{2}x^2,\ \left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right| \leqslant \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+1\right]$ 绝对收敛.

例 18 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续,反常积分 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛,令 $a_n=\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x$,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}$ 收敛.

证: $a_n=\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x \xlongequal{t=nx} \int_0^n f(t)\frac{\mathrm{d}t}{n}=\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$

即

$$a_n^2=\frac{1}{n^2}\left[\int_0^n f(t)\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^n 1^2\mathrm{d}t\int_0^n f^2(t)\mathrm{d}t \quad (\text{柯西不等式})$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^n f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t$$

又反常积分 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛,所以有

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f^2(x)\mathrm{d}x=M \quad (M\text{为非负有限数})$$

于是有 $a_n^2 \leqslant \frac{M}{n}$,则有 $\frac{a_n^2}{n} \leqslant \frac{M}{n^2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}$ 收敛.

题型 114 利用级数证明数列 $\{a_n\}$ 极限的存在或求解某些特殊极限

思路启迪: 构造级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,然后利用级数收敛的必要条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

例 19 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

解：构造级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}$，则由比值法有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\mathrm{e}}{3}<1$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}$ 收敛，则由级数收敛的必要条件有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}=0$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}=\infty$.

例 20 设 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

分析：直接求极限或用单调有界数列必有极限的定理来证明很困难，将 x_n 看作级数 $x_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-x_{k-1})$ 的前 n 项和 $x_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$. 于是要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，只需证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$ 收敛即可.

证：令

$$a_n=x_n-x_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}-2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
$$=-\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}=-\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}\sim-\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}\quad(n\to\infty)$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}\right)$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

11.7 幂级数

题型 115 求函数项级数的收敛域

思路启迪：设 $u_n(x),n=1,2,\cdots$ 为定义在 (a,b) 内的函数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 称为定义在 (a,b) 内的函数项级数. 设 $x_0\in(a,b)$，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛（或发散），则 $x=x_0$ 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点（或发散点）. 所有收敛点（或发散点）的集合，称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域（或发散域）. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛域的求法如下：

① 利用根值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\rho(x)$ 或比值法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\rho(x)$$

② 令 $\rho(x)<1$，得出收敛区间 (c,d)；

③ 令 $x=c,x=d$，分别判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(c),\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(d)$ 的敛散性，最后得出收敛域.

例 21 求下列级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n,\quad a,b>0$.

解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right|^n}=\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right|$

令 $\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right|<1$，得 $(3x-1)^2<(2x+1)^2$，即 $x(x-2)<0$. 解不等式得收敛区间为$(0,2)$.

当 $x=0$ 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；

当 $x=2$ 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，条件收敛.

故原函数项级数的收敛域为 $(0,2]$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2n+1}\cdot\frac{2^n+(-3)^n}{nx^{2n-1}}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2^n+(-3)^n}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^2\right|=\frac{x^2}{3}$$

令 $\frac{x^2}{3}<1$，即 $|x|<\sqrt{3}$，解不等式得收敛区间为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}(-\sqrt{3})^{2n-1}$，发散；

当 $x=\sqrt{3}$ 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}(\sqrt{3})^{2n-1}$，发散.

故原函数项级数的收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n}=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$

令 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$，得 $(1-x)^2<(1+x)^2$，即 $x>0$.

解不等式得收敛区间为 $(0,+\infty)$.

当 $x=0$ 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$，发散.

故原函数项级数的收敛域为 $(0,+\infty)$.

(4) 直接套用前面所讲的方法比较困难，因此利用

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$$

通过幂级数的运算性质求解.

① 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n}x^n\right|}=a|x|$$

令 $a|x|<1$，得 $|x|<\frac{1}{a}$，于是得收敛区间为 $\left(-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$.

令 $x=-\frac{1}{a}$，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\left(-\frac{1}{a}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，收敛；

令 $x=\frac{1}{a}$，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散.

所以收敛域为 $\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$.

② 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{b^n}{n^2}x^n\right|}=b|x|$$

令 $b|x|<1$，得 $|x|<\frac{1}{b}$，于是得收敛区间为 $\left(-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right)$.

令 $x=-\frac{1}{b}$，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}\left(-\frac{1}{b}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$，收敛；

令 $x=\frac{1}{b}$，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}\left(\frac{1}{b}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，收敛.

所以，收敛域为 $\left[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right]$.

③ 如果 $a\geqslant b$，则 $\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}$，于是

$$\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)\subset\left[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right]$$

故原级数的收敛域为 $\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$.

④ 如果 $a<b$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，于是

$$\left[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right]\subset\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$$

故原级数的收敛域为 $\left[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right]$.

题型 116 求幂级数的收敛域或收敛半径

思路启迪： 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的系数满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$$

则收敛半径为

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$$

然后根据 $|x-x_0|<R$，得出收敛区间 (x_0-R,x_0+R)，再确定端点的敛散性，从而得出收敛域.

注意： 若幂级数的幂次不是按 x 的自然数顺序依次递增的，比如缺少 x 的奇次幂或偶次幂或其他项，这时只能用比值判别法，由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1$$

得出级数的收敛区间及收敛半径，再讨论幂级数在端点处的敛散性，从而得出收敛域.

例 22 求下列幂级数的收敛域和收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^{2n-1}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n\cdot(x-a)^{2n}}{2^n}$.

解： (1) 因 $$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2}$$

所以收敛半径为 $R=1/\rho=2$，收敛区间为 $(-2,2)$.

当 $x=\pm 2$ 时，幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n](\pm 1)^n$，其一般项不趋于零，发散.

故幂级数的收敛域为 $(-2,2)$.

(2) 因 $$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

故收敛半径为 $R=1$，由 $|x-3|<1$ 得收敛区间为 $(2,4)$.

当 $x=2$ 时，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$，绝对收敛；

当 $x=4$ 时，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，收敛.

故原级数的收敛域为 $[2,4]$.

(3) 此级数缺少 x 的偶次幂项，直接用比值判别法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n+2}|x^2|=2x^2$$

令 $2x^2<1$，即 $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$，得收敛区间为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，收敛半径为 $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

当 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=-\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，发散；

当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，发散. 故幂级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(4) 此级数缺少 x 的奇次幂项，直接用比值判别法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}|(x-a)^2|=\frac{1}{2}(x-a)^2$$

令 $\frac{1}{2}(x-a)^2<1$，解得收敛区间为 $(a-\sqrt{2},a+\sqrt{2})$，收敛半径为 $R=\sqrt{2}$.

当 $x=a\pm\sqrt{2}$ 时，原级数均变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$，发散.

故幂级数的收敛域为 $(a-\sqrt{2},a+\sqrt{2})$.

例 23 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

分析：本题考查关于幂级数收敛域特征的阿贝尔定理. 由题中条件可知，两个幂级数形式均为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n$，于是两个幂级数的收敛半径及在边界点的收敛性相同. 已知第一个幂级数收敛区间的对称点为 $x=-2$，再结合已知条件进行推导.

解：因为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 收敛区间的对称点为 $x=-2$，又由题设可知该级数在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n2^n$ 收敛，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-2)^n$ 发散，从而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $(-2,2]$，故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $(-2+3,2+3]$，即 $(1,5]$.

注：本题中两个幂级数的收敛域只是在数轴上的简单平移.

题型 117 求函数在指定点的幂级数展开式

思路启迪：方法 1（直接法）

(1) 先求 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots$，再求出 $f'(x_0),f''(x_0),\cdots,f^{(n)}(x_0),\cdots$.

(2) 写出对应的泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

若 $x_0=0$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为麦克劳林级数.

(3) 验证 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}\overset{?}{=}0$.

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，再求级数收敛域.

方法 2（间接法） 利用七个展开式，结合四则运算、复合运算、变量替换、逐项微分、逐项积分而达到求出给定函数的泰勒展开式. 一般用间接法.

例 24 将下列函数在指定点展成幂级数：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$ 在 $x=0$ 处；

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $x=0$ 处；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=1$ 处；

(4) $f(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x-1}\right)$ 在 $x=1$ 处；

(5) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}$ 在 $x=-1$ 处.

解： (1) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}=\dfrac{x}{3^2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}$

则由七个展开式中的第(2)式可令 $u=\left(\dfrac{x}{3}\right)^2$，则有

$$f(x)=\frac{x}{3^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{x}{3^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+2}}$$

而由 $u=\left(\dfrac{x}{3}\right)^2<1\Rightarrow x\in(-3,3)$.

(2) $f'(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

则
$$f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x^2)^2+\cdots+$$
$$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(x^2)^n+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\cdots$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n}$$

于是
$$f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1)$$

(3) 因函数
$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$
$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}},\quad -1<\frac{x-1}{2}<1\Rightarrow -1<x<3$$
$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}},\quad -1<\frac{x-1}{3}<1\Rightarrow -2<x<4$$

故
$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n,\quad x\in(-1,3).$$

(4) $\dfrac{e^x-e}{x-1}=\dfrac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}$

因为
$$e^{x-1}=1+(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x-1)^n+\cdots$$

所以

$$\frac{e^x-e}{x-1}=\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}=e\left[1+\frac{1}{2!}(x-1)+\cdots+\frac{1}{n!}(x-1)^{n-1}+\cdots\right]$$

于是

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right)=e\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}(x-1)+\cdots+\frac{n-1}{n!}(x-1)^{n-2}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)e(x-1)^{n-2}}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

(5) $$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-1}}x^{2n-1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}=2\sin\frac{x}{2}$$

$$=2\sin\frac{1}{2}[(x+1)-1]$$

$$=2\sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{1}{2}-2\cos\frac{x+1}{2}\sin\frac{1}{2}$$

$$=2\cos\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}-2\sin\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n}$$

其中 $x\in(-\infty,+\infty)$.

例 25 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$,

(1) 将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数; (2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和; (3) 求 $f^{(n)}(0)$.

解: (1) 因为

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad -1<x<1$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

所以

$$\frac{1+x^2}{x}\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n},\quad -1\leqslant x\leqslant 1, x\neq 0$$

又

$$\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n}\right]_{x=0}=1=f(0)$$

于是

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n},\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

(2) 令 $x=1$,得 $f(1)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{\pi}{2}$,因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

(3) 因为

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

又根据函数的幂级数展开式的唯一性,所以有

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n},\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

即 x 的同次幂的系数相等,于是

$$f^{(2k-1)}(0)=0,\ f^{(2k)}(0)=\frac{2\cdot(-1)^k\cdot(2k)!}{1-4k^2}$$

题型 118 无穷级数求和

思路启迪:1. 幂级数求和函数的方法

方法 1 利用逐项微分、积分,解题步骤如下:

(1) 求出幂级数的收敛域.

(2) 利用逐项微分、积分将通项中除了以 n 为指数幂 $2^n,3^n,\cdots$ 及阶乘 $n!,(2n)!,(2n+1)!$ 之外的与 n 相关的系数全部去掉,使其成为七个展开式中通项的一种形式(注意,若要去掉的因子在分子上,则通过逐项积分法;若要去掉的因子在分母上,则通过逐项微分法),然后写出对应的和函数.

(3) 做与步骤(2)相反的分析运算,便得原幂级数的和函数.

方法 2 利用微分方程及拼凑法求和函数,解题程序如下:

(1) 设级数的和函数为 $s(x)$,对其求导,观察 $s(x)$ 与 $s'(x)$ 或 $s''(x)$ 的关系;

(2) 求解关于 $s(x)$ 的微分方程.

方法 3 利用比较法.

2. 数项级数求和

方法 1 利用级数收敛性的定义,步骤如下:

(1) $u_n=v_{n+1}-v_n$;(2) 求 S_n;(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

方法 2 利用阿贝尔定理构造幂级数法:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$ 和函数 $f(x)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

例 26　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

解: (1) 收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1$，当 $x=\pm 1$ 时,由于一般项不趋于零,级数发散,所以收敛域为 $(-1,1)$.

(2) 为求和函数,先积分,转化成等比级数,再求和,最后再求导.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$$

例 27　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$ 的和函数.

解: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}\right|}=\frac{|x|}{2}$

令 $\frac{|x|}{2}<1\Rightarrow |x|<2$，可得收敛区间为 $(-2,2)$，故

令 $x=-2$，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$，收敛;

令 $x=2$，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}$，发散.

由此可知,该级数的收敛域为 $[-2,2)$.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{2-x}\mathrm{d}x=\frac{\ln 2-\ln(2-x)}{x},\quad x\neq 0$$

因为 $x=0\in[-2,2)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 2-\ln(2-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$$

故其和函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln 2-\ln(2-x)}{x}, & x\in[-2,0)\cup(0,2)\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

例 28 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$ 的和函数.

解: 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$,两边积分,得

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n+1)t^{2n}}{n!}\mathrm{d}t=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=x\mathrm{e}^{x^2}$$

两边求导,得

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=(x\mathrm{e}^{x^2})'=(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例 29 判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2-1}{n^2}$ 是否收敛,若收敛,求其和.

解: 因为

$$u_n=\ln(n^2-1)-\ln n^2=[\ln(n-1)-\ln n]+[\ln(n+1)-\ln n]$$

所以

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=2}^{n}u_k=(\ln 1-\ln 2)+\ln(n+1)-\ln n\quad\text{(只剩首尾项)}\\&=\ln\frac{n+1}{n}-\ln 2\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\ln 2\right)=-\ln 2$$

即原级数收敛,且其和为 $-\ln 2$.

例 30 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

解: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

对 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ 连续求导两次,得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1)\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{4}{27}$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}$.

注: 通项可拆成代数和时,在求和之前一定要拆开,然后分别求各级数的和,最后求出它们的代数和.

例 31 (1) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$;

(2) 利用 (1) 的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解: (1) 易得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$，由幂级数的逐项求导性质，得

$$y'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots$$

$$y''(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots$$

于是

$$y'' + y' + y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

(2) 由于(1)及 $y(0) = 1, y'(0) = 0$，所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数即为方程

$$y'' + y' + y = e^x$$

满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的解.

方程 $y'' + y' + y = e^x$ 对应的齐次方程 $y'' + y' + y = 0$ 的特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

求得特征根为 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$；

可设方程 $y'' + y' + y = e^x$ 的特解为 $y^* = Ae^x$，代入方程得 $A = \frac{1}{3}$，即 $y^* = \frac{1}{3}e^x$. 所以方程的通解为

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}e^x$$

代入初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$，得 $C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0$.

所以，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为

$$y = \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x, \quad -\infty < x < +\infty$$

例 32 求下列级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$； (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$.

解: (1) 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$，设其和函数为 $s(x)$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = e^x$ 类似. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = e^x - 1$$

两边对 x 求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}x^{n-1} = e^x$$

两边同乘以 x 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n = xe^x$$

两边对 x 求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1} = (x+1)e^x$$

两边同乘以 x 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n = x(x+1)e^x$$

(2) 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，设其和函数为 $s(x)$，则

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，与七个展开式比较，它类似于

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\sin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+3} = x-\sin x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+2} = 1-\frac{\sin x}{x},\quad x\neq 0$$

上式两边对 x 求导，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n+1} = -\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n} = \frac{\sin x - x\cos x}{2x^3}$$

因为 $s(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$s(0)=\lim_{x\to 0}s(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{6x^2}=\frac{1}{6}$$

故

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-x\cos x}{2x^3}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{6}, & x=0\end{cases}$$

注：一般对数项级数求和，先判断级数的敛散性，然后构造一个对应的幂级数求其和函数 $s(x)$，再求极限.

11.8 傅里叶级数

题型 119 将函数展开成傅里叶级数

思路启迪： 将 $f(x)$ 展成傅里叶级数的程序如下：

(1) 画出 $f(x)$ 的图形并验证是否满足狄利克雷收敛条件(画图目的：验证狄氏条件，若收敛，则由图容易准确写出收敛域，易于看出奇偶性)；

(2) 求出傅氏系数；

(3) 写出傅氏级数，并标出它在何处收敛于 $f(x)$.

注：(1) 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数，且在 $[-l,l]$ 或 $[0,2l]$ 上可积，则傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$$

以 $f(x)$ 的傅里叶系数为系数的三角级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级数.

(2) 狄利克雷收敛准则：

设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上满足条件：

① 除有限个第一类间断点外都是连续的；

② 只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l,l]$ 上收敛，且有

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=\begin{cases}f(x), & x\text{ 是 }f(x)\text{的连续点}\\ \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)], & x_0\text{ 是 }f(x)\text{的第一类间断点}\\ \frac{1}{2}[f(-l-0)+f(l+0)], & x=\pm l\end{cases}$$

例 33 将下列函数展成傅里叶级数：

(1) $f(x)=|\sin x|,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ 0, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$，并利用结果求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

解：(1) 如图 11-1 所示，可知 $f(x)=|\sin x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上处处连续，且只有三个极值点，所以满足狄氏条件，因为第一周期的端点与第二周期的端点重合，所以收敛域为 $[-\pi,\pi]$.

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}(\sin^2 x)\Big|_0^{\pi}=0$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]\Big|_0^{\pi}\\&=\frac{1}{\pi}[(-1)^{n-1}-1]\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{2}{\pi(n^2-1)}[(-1)^{n-1}-1]=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ -\dfrac{4}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

故 $|\sin x|=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1},\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

(2) 如图 11-2 所示，可知 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上处处连续，无极值点，所以满足狄氏条件，因为第一周期的端点与第二周期的端点不重合，所以收敛域为 $(-\pi,\pi)$.

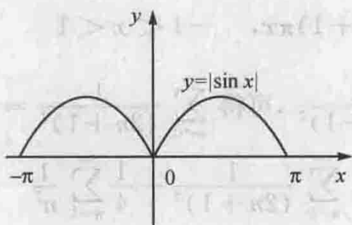


图 11-1

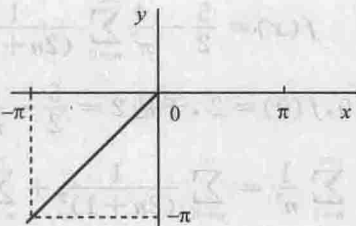


图 11-2

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$n=0$ 无意义，所以 a_0 要单独求.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

故

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right],\quad -\pi<x<\pi$$

令 $x=0$，$f(0)=-\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}=0$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}=\frac{\pi}{4}$.

又
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}=\frac{2}{1^2}+0+\frac{2}{3^2}+\cdots=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

例 34 将 $f(x)=2+|x|$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解：如图 11-3 所示，可知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上处处连续，无极值点，所以满足狄氏条件，因为第一周期的端点与第二周期的端点不重合，所以收敛域为 $(-1,1)$.

而 $f(x)$ 中的 2 本身已是周期为 2 的傅氏级数了，只需将 $|x|$ 展成傅氏级数即可，因为 $|x|$ 为偶函数，故

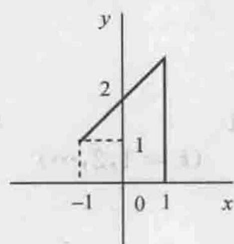


图 11-3

$$a_0=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1$$
$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$
$$a_n=2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)\quad(n=1,2,\cdots)$$

于是
$$|x|=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)\pi x$$

故
$$f(x)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x,\quad -1<x<1$$

令 $x=0$，$f(0)=2$，于是 $2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$，可得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

又
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

例 35 将 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<2\\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 展成以8 为周期的傅里叶级数.

解：如图 11-4 所示，作奇开拓

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x<4\\ -f(x), & -4\leqslant x<0\end{cases}$$

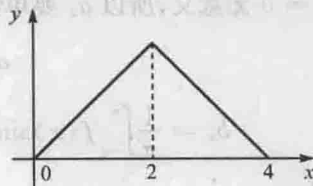


图 11-4

则
$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$
$$b_n=\frac{2}{4}\int_0^4 g(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x + \int_2^4 (4-x)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{2} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

于是由狄利克雷收敛定理，在 $[-4,4]$ 上有

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{4}$$

故在 $[0,4]$ 上，有

$$f(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{4}$$

例 36 将函数 $f(x)=1-x^2$，$0\leqslant x\leqslant\pi$，展开成余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

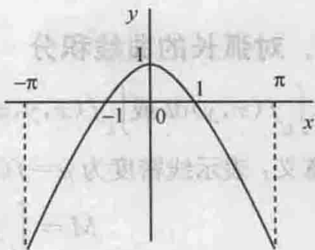


图 11-5

解：对 $f(x)=1-x^2$ 进行偶开拓，如图 11-5 所示.

因为 $f(x)=1-x^2$ 是偶函数，所以 $b_n=0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x = 2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

所以

$$f(x) = 1-x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

$$= 1-\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

令 $x=0$，代入上式，可求得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

第 12 章* 曲线积分与曲面积分

●重要定理、公式和结论

12.1 曲线积分

1. 对弧长的曲线积分

形式：$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l$ 或 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l$.

物理意义：表示线密度为 $\mu=f(x,y)$ 或 $\mu=f(x,y,z)$ 的曲线 L 的质量 M，即

$$M=\int_L f(x,y)\mathrm{d}l \quad 或 \quad M=\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l$$

性质：(1) 与路径方向无关，即

$$\int_{L(AB)} f(x,y,z)\mathrm{d}l=\int_{L(BA)} f(x,y,z)\mathrm{d}l$$

(2) 对路径具有可加性，即

$$\int_L f\mathrm{d}l=\int_{L_1} f\mathrm{d}l+\int_{L_2} f\mathrm{d}l+\cdots+\int_{L_k} f\mathrm{d}l,\ L=L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_k,\ L_i\cap L_j=\varnothing,\ i\neq j$$

2. 对坐标的曲线积分

形式：$\int_{L(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 或 $\int_{L(AB)} P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$.

物理意义：表示质点在力 $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$ 作用下沿曲线 L 从 A 点移动到 B 点，外力所做的功 W，即

$$W=\int_{L(AB)} P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

性质：(1) 与路径方向有关，即

$$\int_{L(AB)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=-\int_{L(BA)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

(2) 对路径具有可加性，即

$$\int_L f\mathrm{d}l=\int_{L_1} f\mathrm{d}l+\int_{L_2} f\mathrm{d}l+\cdots+\int_{L_k} f\mathrm{d}l,\ L=L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_k,\ L_i\cap L_j=\varnothing,\ i\neq j$$

3. 两种曲线积分的关系

$$\begin{aligned}\int_{L(AB)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z&=\int_L\left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}+Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}+R\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\right)\mathrm{d}l\\&=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}l\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 表示曲线 L 上一点 $M(x,y,z)$ 处的沿曲线 L 方向的切线的方向余弦.

4. 基本定理

定理 1(格林公式) 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有一阶连续的偏导数,则

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 L 为闭区域 D 的边界线,其方向取正方向.

正向定义:人沿着边界行走,区域 D 始终在人的左边,人走的方向即为正向.

定理 2 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关的充分必要条件是:

$$\oint_{L^*} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

其中 L^* 为闭区域 D 中任一光滑简单闭曲线.

定理 3 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通域 D 上具有一阶连续的偏导数,则曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$$

单连通域:(1) 不包括域 D 的边界上的任何点;

(2) D 内没有任何点和洞不属于 D.

或 D 中的一条闭曲线,收缩为一点后仍属于 D.

定理 4 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在单连通空间域 Ω 上具有一阶连续的偏导数,则曲线积分 $\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 与路径无关的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad\frac{\partial R}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial z}\qquad\frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial R}{\partial x}$$

定理 5(重点) 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有一阶连续的偏导数,且恒有 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,$L_1,L_2$ 为 D 中任意两条同向的闭曲线,且它们各自所围成的域中含有相同的不属于 D 的点,则

$$\oint_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\oint_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

12.2 曲面积分

1. 对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}s$

物理意义:表示面密度为 $\mu=f(x,y,z)$ 的曲面 Σ 的质量 M,即 $M=\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}s$;

性质：(1) 与曲面 Σ 的侧无关，即 $\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\overline{\Sigma}}$，$\overline{\Sigma}$ 为 Σ 的反侧；

(2) 对曲面具有可加性，即

$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\cdots+\iint\limits_{\Sigma_k},\ \Sigma=\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_k,\ \Sigma_i\cap\Sigma_j=\varnothing,\ i\neq j$$

2. 对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

物理意义：表示流速 $\boldsymbol{v}=\{P,Q,R\}$ 的流体在稳定流动中从曲面 Σ 的一侧流出的流量 ϕ，即

$$\phi=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质：(1) 与曲面的侧有关，即 $\iint\limits_{\Sigma}=-\iint\limits_{\overline{\Sigma}}$，$\overline{\Sigma}$ 为 Σ 的反侧；

(2) 对曲面具有可加性，即

$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\cdots+\iint\limits_{\Sigma_k},\ \Sigma=\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_k,\ \Sigma_i\cap\Sigma_j=\varnothing,\ i\neq j$$

3. 两种曲面积分的关系

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint\limits_{\Sigma}\left[P(x,y,z)\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}+Q(x,y,z)\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+R(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}s\\=&\iint\limits_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 表示曲面 Σ 上一点 $M(x,y,z)$ 处法线方向的方向余弦.

4. 基本定理

定理 1(高斯定理)

设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在闭曲面 Σ 所围成的空间域 Ω 中具有一阶连续的偏导，则

$$\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Σ 取外侧.

定理 2(斯托克斯公式)

设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面 Σ 所围成的空间域 Ω 中具有一阶连续的偏导，L 为曲面 Σ 的边界线，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}s$$

L 的正向与曲面 Σ 的侧满足右手系.

● 核心题型及思路启迪

12.3 曲线积分题型

题型 120 对弧长曲线积分的计算

思路启迪：特殊法 利用路径 L 的对称性、轮换对称性和被积函数 $f(x,y)$，$f(x,y,z)$的奇偶性以及路径表达式可直接代入被积式中的特点简化运算.

一般法 化为路径参数的定积分计算，解题程序为

① 画出路径 L 的草图；

② 写出各路径段的参数式

$$L_i:\begin{cases}x=x_i(t)\\y=y_i(t)\end{cases}\quad \alpha_i\leqslant t\leqslant\beta_i\qquad dl=\sqrt{x_i'^2+y_i'^2}\,dt$$

③ $I=\sum\limits_i\int_{\alpha_i}^{\beta_i}f[x_i(t),y_i(t)]\sqrt{x_i'^2+y_i'^2}\,dt.$

空间曲线积分 $\int_L f(x,y,z)dl$ 的计算类似.

例 1 求下列积分.

(1) $\int_L(x^2+y^3)dl$，其中 L：$x^2+y^2=a^2$.

(2) $\int_L(3x^2+4y^2+2xy)dl$，其中 L：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，周长为 a.

(3) 设 L：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x+y+z=0\end{cases}$，计算：① $\int_L x^2dl$；② $\int_L(xy+yz+zx)dl$.

解：(1) $\int_L(x^2+y^3)dl=\int_L x^2dl+\int_L y^3dl$.

由 L 的轮换对称性，有$\int_L x^2dl=\int_L y^2dl$.

又 L 关于 x 轴对称，且 $f(x,y)=y^3$ 关于 y 为奇函数，所以 $\int_L y^3dl=0$，故

$$\int_L(x^2+y^3)dl=\frac{1}{2}\int_L(x^2+y^2)dl=\frac{a^2}{2}\int_L dl=\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a=\pi a^3$$

(2) $\int_L(3x^2+4y^2+2xy)dl=\int_L(3x^2+4y^2)dl+\int_L 2xydl.$

L 关于 x 轴对称，且 $f(x,y)=xy$ 关于 y 为奇函数，所以 $\int_L 2xy\,dl=0$，故

$$I=\int_L(3x^2+4y^2)\,dl=12\int_L\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)dl=12\int_L dl=12a$$

(3) 由题可知，L 为以原点为圆心，半径为 a 的圆.

① 由轮换对称性，有

$$\int_L x^2\,dl=\int_L y^2\,dl=\int_L z^2\,dl$$
$$=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)\,dl=\frac{a^2}{3}\int_L dl=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2}{3}\pi a^3$$

② $I=\int_L(xy+yz+zx)\,dl$
$$=\frac{1}{2}\int_L[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]\,dl$$
$$=\frac{1}{2}\int_L(0-a^2)\,dl=-\frac{a^2}{2}\int_L dl=-\pi a^3$$

例 2 求下列积分.

(1) 计算 $I=\int_L(x+y)e^{x^2+y^2}\,dl$，其中 L 是圆弧 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 与 $y=x,y=-x$ 所围成的扇形区域的边界；

(2) 计算 $I=\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl$，其中 L 是圆弧 $x^2+y^2=a^2(a>0)$，$y=x$ 与 x 轴在第一象限所围成的图形的边界.

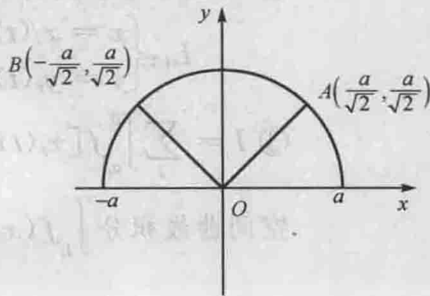


图 12-1

解：(1) 如图 12-1 所示，$I=\int_{\overline{OA}}=\int_{\widehat{AB}}+\int_{\overline{BO}}$.

$\overline{OA}$：$y=x,0\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$，$dl=\sqrt{2}\,dx$，$\int_{\overline{OA}}=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}2xe^{2x^2}\cdot\sqrt{2}\,dx=\frac{e^{a^2}-1}{\sqrt{2}}$.

$\widehat{AB}$：$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\end{cases}$，$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$，$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta=a\,d\theta$，

$$\int_{\widehat{AB}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}a(\cos\theta+\sin\theta)e^{a^2}\cdot a\,d\theta=\sqrt{2}a^2e^{a^2}.$$

$\overline{BO}$：$y=-x,-\frac{a}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 0,dl=\sqrt{2}\,dx$，$\int_{\overline{BO}}=\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{0}0\cdot e^{2x^2}\cdot\sqrt{2}\,dx=0$，故

$$I=\frac{\sqrt{2}}{2}[(1+2a^2)e^{a^2}-1]$$

(2) 如图 12-2 所示，$I=\int_{\overline{OA}}+\int_{\widehat{AB}}+\int_{\overline{BO}}$.

$\overline{OA}$：$y=0,0\leqslant x\leqslant a,dl=dx$，$\int_{\overline{OA}}=\int_0^a e^x\,dx=e^a-1$.

$\widehat{AB}:\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\end{cases}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}, \mathrm{d}l=\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta,$

$$\int_{\widehat{AB}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^a\cdot a\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a.$$

$\overline{BO}: y=x, 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}, \mathrm{d}l=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x, \int_{\overline{BO}}=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$ $=\mathrm{e}^a-1$，故

$$I=2(\mathrm{e}^a-1)+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a$$

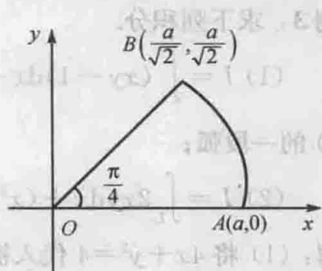


图 12-2

题型 121 平面坐标中对坐标的曲线积分的计算

思路启迪： 平面坐标中对坐标的曲线积分 $I=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的计算.

方法 1 化为路径参数的定积分计算，解题程序为：

(1) 画出路径 L 草图；

(2) 写出各路径段的参数式，

$$L_i:\begin{cases}x=x_i(t)\\y=y_i(t)\end{cases}, t=\alpha_i\leftrightarrow\text{起点参数值}, t=\beta_i\leftrightarrow\text{终点参数值}$$

(3) $I=\sum_i\int_{\alpha_i}^{\beta_i}[P(x_i(t),y_i(t))x'_i(t)+Q(x_i(t),y_i(t))y'_i(t)]\mathrm{d}t.$

方法 2 利用格林公式，解题程序为：

(1) 求 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$，验证 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 是否相等；

(2) 若 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则根据 L 的具体情况，有以下结论：

① L 为闭，则 $I=0$；

② L 为非闭，则 $I=\oint_{L+L^*}-\int_{L^*}=-\int_{L^*}$；

③ 因积分与路径无关，设 L：起点 $A(x_0,y_0)$，终点 $B(x,y)$，则

$$\int_{L^*}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L(x_0,y_0)}^{L(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(3) 若 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 存在，但 $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$，此时要画出路径 L 的草图，

① L 为闭，则 $I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是 L 所围闭区域；

② L 为非闭，则 $I=\oint_{L+L^*}-\oint_{L^*}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L^*}.$

例 3 求下列积分.

(1) $I=\int_L (xy-1)\mathrm{d}x+\dfrac{2x^2y}{\sqrt{4x+y^2}}\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $4x+y^2=4$ 上从 $A(1,0)$ 到 $B(0,2)$ 的一段弧;

(2) $I=\int_L 2xy\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 是 $A(1,0)$ 到 $B(2,4)$ 的直线段.

解:(1) 将 $4x+y^2=4$ 代入被积式中,得

$$I=\int_L (xy-1)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$$

$L:x=1-\dfrac{y^2}{4}$, y 的起点为 0;终点为 2.

故
$$I=\int_0^2\left\{\left[\left(1-\frac{y^2}{4}\right)y-1\right]\cdot\left(-\frac{y}{2}\right)+\left(1-\frac{y^2}{4}\right)^2y\right\}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2\left(\frac{y^5}{16}+\frac{y^4}{8}-\frac{y^3}{2}-\frac{y^2}{2}+\frac{3y}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{17}{15}$$

(2) 直线 L 的方向矢量 $\boldsymbol{s}=\{1,4\}$,则直线 L 的参数式方程为

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=4t\end{cases}\quad t:0\rightarrow 1$$

故
$$I=\int_0^1\{2(1+t)\cdot 4t\cdot 1+[(1+t)^2+(4t)^2]\cdot 4\}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1(76t^2+16t+4)\mathrm{d}t=\frac{112}{3}$$

例 4 求 $I=\int_L (2xe^y-3x^2)\mathrm{d}x+(x^2e^y+2y-1)\mathrm{d}y$,其中 L 通过 $A(1,3)$,$B(3,-1)$,$C(4,-2)$三个点.

解:$P=2xe^y-3x^2$,$Q=x^2e^y+2y-1$,于是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=2xe^y\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=2xe^y\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

则积分与路径无关.

如图 12-3 所示,$I=\int_{\overline{AD}}+\int_{\overline{DC}}=\int_1^4(2xe^3-3x^2)\mathrm{d}x+\int_3^{-2}(16e^y+2y-1)\mathrm{d}y$

$$=(x^2e^3-x^3)\big|_1^4+(16e^y+y^2-y)\big|_3^{-2}=16e^{-2}-e^3-63$$

例 5 计算 $I=\int_L \dfrac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x+2[2x+y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})]\mathrm{d}y$,其中 L:沿上半椭圆弧$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$,从 $A(b,0)$到 $B(-b,0)$,其中 $b>0$,$c>0$.

解:$P=\dfrac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$,$Q=2[2x+y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})]$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}\qquad\frac{\partial Q}{\partial x}=4+\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

画出路径草图,如图 12-4 所示.

$$I=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}$$

$$=\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\cdot\frac{1}{2}\pi bc=2\pi bc$$

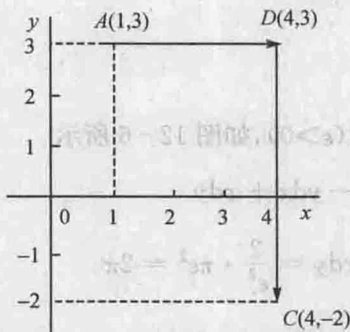


图 12-3

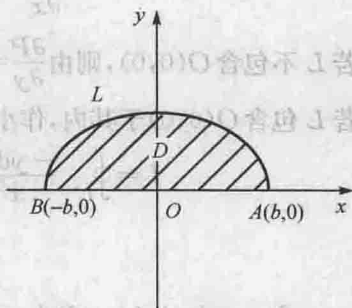


图 12-4

例 6 计算 $I=\int_L\frac{y\mathrm{d}x+(\pi a-x)\mathrm{d}y}{(x-\pi a)^2+\pi^2y^2}$,其中 L 是从 $O(0,0)$ 沿摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 到 $A(2a\pi,0)(a>0)$ 的一拱.

解: $P=\frac{y}{(x-\pi a)^2+\pi^2y^2}$, $Q=\frac{\pi a-x}{(x-\pi a)^2+\pi^2y^2}$,则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{(x-\pi a)^2-\pi y^2}{[(x-\pi a)^2+\pi^2y^2]^2}\\\frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{(x-\pi a)^2-\pi y^2}{[(x-\pi a)^2+\pi^2y^2]^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

由此可知在不包含$(\pi a,0)$的单连通区域内,积分与路径无关,如图 12-5 所示.

取 L^*:$(x-\pi a)^2+(\pi y)^2=(\pi a)^2$, $y\geqslant 0$.

注意:不能取 L^* 为直线段$\overline{OA}$,因为其含有$(\pi a,0)$.

将 L^* 写成参数式 $\begin{cases}x-\pi a=\pi a\cos t\\\pi y=\pi a\sin t\end{cases}$, $t:\pi\to 0$.

故 $I=\int_L\frac{y\mathrm{d}x+(\pi a-x)\mathrm{d}y}{(x-\pi a)^2+\pi^2y^2}$

$$=\int_\pi^0\frac{a\sin t(-\pi a\sin t)+(-\pi a\cos t)\cdot a\cos t}{\pi^2a^2}=1.$$

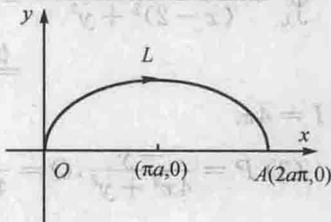


图 12-5

例 7 计算下列积分.

(1) $I=\int_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 为不通过 $O(0,0)$ 的任一光滑闭曲线,取逆时针方向;

(2) $I=\int_L\left[\frac{-y}{(x-2)^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}+\frac{x}{x^2-y^2}\right]\mathrm{d}y$,其中 L 为沿两圆弧$(x-2)^2+y^2=1$, $x^2+y^2=1$ 逆时针方向转一圈;

(3) $I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心，半径为 $R(R>0,\neq 1)$ 的正向圆周.

解：(1) $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

① 若 L 不包含 $O(0,0)$，则由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 可得 $I=0$；

② 若 L 包含 $O(0,0)$ 于其内，作小圆 L^*：$x^2+y^2=\varepsilon^2(\varepsilon>0)$，如图 12-6 所示.

于是
$$I=\oint_{L^*}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L^*}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\varepsilon^2=2\pi$$

(2) $I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+(x-2)\mathrm{d}y}{(x-2)^2+y^2}+\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，由图 12-7 可知 $L=L_1\cup L_2$.

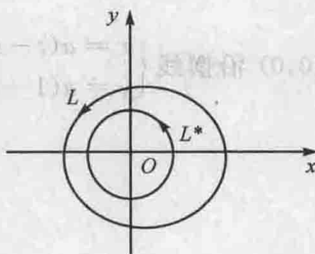


图 12-6

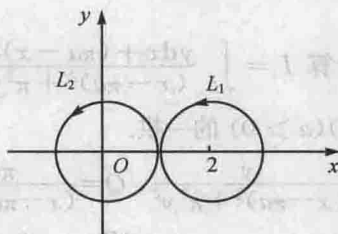


图 12-7

$$\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\oint_{L_2}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\xlongequal{\text{由解(1)}}0+2\pi=2\pi$$

$$\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+(x-2)\mathrm{d}y}{(x-2)^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{-y\mathrm{d}x+(x-2)\mathrm{d}y}{(x-2)^2+y^2}+\oint_{L_2}\frac{-y\mathrm{d}x+(x-2)\mathrm{d}y}{(x-2)^2+y^2}$$
$$\xlongequal{\text{仿解(1)}}2\pi+0=2\pi.$$

故 $I=4\pi$.

(3) $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$，则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

① 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则 $I=0$，$(R<1)$.

② 当 $R>1$ 时，$(0,0)$ 为奇点，作一小椭圆 L^*：$4x^2+y^2=\varepsilon^2(\varepsilon>0)$，即 L^*：$\begin{cases}x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t\\ y=\varepsilon\sin t\end{cases}$，

于是

$$I=\oint_{L^*}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L^*}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\frac{\varepsilon^2}{2}=\pi$$

例 8 设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续的偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，且对任意 t，恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

求 $Q(x,y)$.

解：因曲线积分与路径无关，得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$$

于是 $Q(x,y)=x^2+C(y)$，其中 $C(y)$ 为待定函数. 则

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 Q(t,y)\mathrm{d}y=\int_0^1[t^2+C(y)]\mathrm{d}y$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 Q(1,y)\mathrm{d}y=\int_0^1[1+C(y)]\mathrm{d}y$$

于是有 $\int_0^1[t^2+C(y)]\mathrm{d}y=\int_0^1[1+C(y)]\mathrm{d}y$，两边对 t 求导得

$$2t=1+C(t)$$

于是 $C(t)=2t-1$. 故 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

例 9 设在区域 D：$x^2+y^2\leqslant 1$ 内，$u(x,y)$，$v(x,y)$ 具有一阶连续的偏导数，在 $x^2+y^2=1$ 上，$u(x,y)=1$，$v(x,y)=y$. 令

$$\boldsymbol{f}=v(x,y)\boldsymbol{i}+u(x,y)\boldsymbol{j}\qquad \boldsymbol{g}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}$$

计算 $I=\iint_D \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：$I=\iint_D\{v,u\}\cdot\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_D\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(uv)-\frac{\partial}{\partial y}(uv)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L:x^2+y^2=1}uv\mathrm{d}x+uv\mathrm{d}y \qquad \text{(利用格林公式)}$$

$$=\oint_{L:x^2+y^2=1}y\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\iint_D(0-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

题型 122 空间域中对坐标的曲线积分的计算

思路启迪：空间域中对坐标的曲线积分 $I=\int_{L(AB)} P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 的计算方法：

(1) 化为路径参数对定积分的计算(尤其 L 为闭时)；

(2) 化为投影坐标面上的平面曲线积分；

(3) 利用斯托克斯公式化曲线积分为曲面积分.

设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面 Σ 所张成的空间域 Ω 中有一阶连续的偏导，L 为曲面 Σ 的边界线，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}s$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 Σ 上一点 (x,y,z) 处的法线的方向余弦. L 的正向与曲面 Σ 的侧满足右手系. 注意：为简单起见，选择以 L 为边界线的平面作为曲面 Σ.

例 10 计算 $I=\int_L (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$，其中 L 沿曲线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=\dfrac{h}{2\pi}t \end{cases}$，从 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$，$a>0,h>0$.

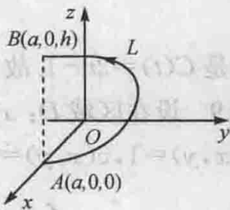


图 12-8

解：如图 12-8 所示，$I=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}$.

$$\oint_{L+\overline{BA}}=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy \end{vmatrix}=0$$

因为 $\overline{BA}$：$\begin{cases} x=a \\ y=0 \\ 0\leqslant z\leqslant h \end{cases}$，于是 $\int_{\overline{BA}}=\int_h^0 z^2\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{3}h^3$.

故
$$I=0-\left(-\frac{1}{3}h^3\right)=\frac{1}{3}h^3$$

例 11 计算 $I=\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1(a>0,h>0)$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

解：L 化为参数式 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=h\left(1-\dfrac{x}{a}\right)=h(1-\cos t) \end{cases}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 故

$$I=\int_0^{2\pi}\{[a\sin t-h(1-\cos t)]\cdot(-a\sin t)+[h(1-\cos t)-a\cos t]\cdot a\cos t+ (a\cos t-a\sin t)\cdot h\sin t\}\mathrm{d}t=-\pi a^2-\pi a^2-ah\pi-ah\pi=-2\pi a(a+h)$$

另解：化为 xOy 平面上的平面曲线积分.

$$I=\int_{L^*}\left[\left(1+\frac{h}{a}\right)y-h\right]\mathrm{d}x+\left[h-\left(\frac{h}{a}+1\right)x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D^*}\left[-\left(\frac{h}{a}+1\right)-\left(1+\frac{h}{a}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\left(1+\frac{h}{a}\right)\iint_{D^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\left(1+\frac{h}{a}\right)\cdot\pi a^2=-2\pi a(a+h)$$

12.4 曲面积分题型

题型 123 对面积的曲面积分的计算

思路启迪：**方法 1** 利用对称性及曲面 Σ 的表达式可直接代入被积式中的特点简化计算.

方法 2 利用面积的曲面积分与坐标的曲面积分的关系，化为对坐标的曲面积分的计算.

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_\Sigma\left(P(x,y,z)\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}+Q(x,y,z)\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+R(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 表示曲面 Σ 上一点 $M(x,y,z)$ 处法线方向的方向余弦.

方法 3 化为投影域上的二重积分计算，解题过程：

① 画出 Σ 的草图；

② 设 Σ：$z=z(x,y)$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

③ $I=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

例 12 设曲面 Σ: $|x|+|y|+|z|=1$,计算 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S$.

解:由积分域与被积函数的对称性,有

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x\mathrm{d}S=0 \qquad \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}|x|\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}|z|\mathrm{d}S$$

所以

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

故

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

例 13 计算 $I=\iint_{\Sigma}(3x+4y+6z)\mathrm{d}S$, Σ: 平面 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$ 在第一象限部分.

解:如图 12-9 所示.

$$I=12\iint_{\Sigma}\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}S=12\iint_{\Sigma}1\cdot\mathrm{d}s=12S$$

S 为 $\triangle ABC$ 的面积, $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$, $\overrightarrow{AB}=\{-4,3,0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-4,0,2\}$,则

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -4 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$$

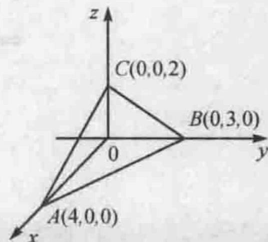


图 12-9

于是

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+8^2+12^2}=\sqrt{61}$$

故

$$I=12S=12\sqrt{61}$$

例 14 设 Σ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是其外法线向量的方向余弦,则 $\iint_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S=$ ______.

解:由两类曲面积分的关系,得

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{a^3}\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}V=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi$$

例 15 计算 $I=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

解:因为 $z^2=R^2-x^2-y^2$, $z_x'=-\frac{x}{z}$, $z_y'=-\frac{y}{z}$,且

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{R}{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$I=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_{上}}z\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_{下}}z\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D}(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

另解 1： 因为 Σ 是球面，所以可用球面坐标计算.

因为 $\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta, z=R\cos\varphi$，所以

$$I=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}R\cos\varphi\cdot R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=2\pi R^3\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}(\sin\varphi)=0$$

另解 2： 因为 S 关于坐标面 xOy 对称，而 $f(x,y,z)=z$ 关于 z 是奇函数，所以 $I=0$.

例 16 计算下列积分.

(1) $I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的表面；

(2) $I=\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是由曲面 $x=\sqrt{y^2+z^2}$ 被 $y^2+z^2=2ay(a>0)$ 截下部分.

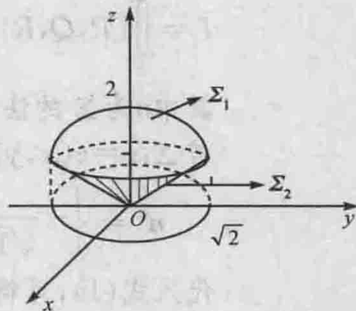


图 12-10

解： (1) 如图 12-10 所示，$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$.

$$\Sigma_1: z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S\\&=\iint_{D_{xy}}4\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2+x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=8\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho+2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=4\pi(8-3\sqrt{2})\end{aligned}$$

(2) $\Sigma: x=\sqrt{y^2+z^2}$, $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sqrt{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Σ 被柱面 $y^2+z^2=2ay(a>0)$ 所截部分在 yOz 平面上的投影域 $D: y^2+z^2\leqslant 2ay$，故

$$I=\iint_{D}(y\sqrt{y^2+z^2}+yz+z\sqrt{y^2+z^2})\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{y=\rho\cos\theta}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}(\rho^2\cos\theta+\rho^2\cos\theta\sin\theta+\rho^2\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

题型 124 对坐标的曲面积分的计算

思路启迪：$I=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

方法 1 高斯公式

(1) Σ 为闭，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 满足条件，则

$$\oiint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(2) Σ 为非闭，$\Sigma+\Sigma^*$ 为闭，则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}-\oiint\limits_{\Sigma^*}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\oiint\limits_{\Sigma^*}$$

方法 2 点积法

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}=\iint\limits_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\boldsymbol{n}^0\mathrm{d}s \qquad (1)$$

其中$\boldsymbol{n}$为 Σ 的法矢量，$\boldsymbol{n}^0$ 为$\boldsymbol{n}$的单位矢量.

若 $\Sigma: z=z(x,y)$，规定：$\boldsymbol{n}=\{-z'_x,-z'_y,1\}$，则

$$\boldsymbol{n}^0=\left\{-\frac{z'_x}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},-\frac{z'_y}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\right\}$$

代入式(1)，可得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{-z'_x,-z'_y,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iint\limits_{D_{xy}}(-Pz'_x-Qz'_y+R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

“$\pm$”的选择：若规定 Σ 的侧的法矢量与$\{-z'_x,-z'_y,1\}$相同，则取“$+$”号，否则取“$-$”号.

方法 3 投影法

$$I=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\pm\iint\limits_{D_{zx}}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

“$\pm$”的选择：设 $\boldsymbol{n}$ 为Σ 的法矢量，

(1) 若$\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}}$为锐角，第一个积分取“$+$”，否则取“$-$”；

(2) 若$\widehat{n,y}$为锐角，第二个积分取“+”，否则取“−”；

(3) 若$\widehat{n,z}$为锐角，第三个积分取“+”，否则取“−”.

对坐标曲面积分计算小结：

(1) 若曲面是封闭的或加面使其封闭，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$具有一阶连续偏导，则可用高斯公式.

(2) 用点积法的条件：

① Σ在某坐标面的投影是一片区域；

② 设$\Sigma: z=z(x,y)$，$\{P,Q,R\}\cdot\{-z'_x,-z'_y,-1\}$简单. 最好$\Sigma$是一个平面.

(3) 用高斯公式、点积法均不方便时，用投影法试试.

例 17 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}4xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{2-(x^2+y^2)}$ 所围形体，取外侧.

解：如图 12-11 所示. 于是

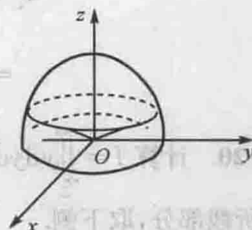


图 12-11

$$
\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{\Sigma}4xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iiint\limits_{\Omega}(4z-z-2z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

利用球面坐标系，得

$$
I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}
$$

例 18 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，取外侧.

解：Σ是封闭的，P,Q,R在Σ所围形体中有一阶连续的偏导数，故可用高斯公式做. 但直接做比较麻烦，为此，将球心移到原点.

令 $x^*=x-a,y^*=y-b,z^*=z-c$，则 $x=a+x^*,y=b+y^*,z=c+z^*$，于是

$$
\begin{aligned}
I&=\oiint\limits_{\Sigma^*}(a+x^*)^2\mathrm{d}y^*\mathrm{d}z^*+(b+y^*)^2\mathrm{d}z^*\mathrm{d}x^*+(c+z^*)^2\mathrm{d}x^*\mathrm{d}y^*\\
&=2\iiint\limits_{\Omega^*}(a+b+c+x^*+y^*+z^*)\,\mathrm{d}x^*\mathrm{d}y^*\mathrm{d}z^*
\end{aligned}
$$

由于对称性，$\iiint\limits_{\Omega^*}x^*\,\mathrm{d}x^*\mathrm{d}y^*\mathrm{d}z^*=\iiint\limits_{\Omega^*}y^*\,\mathrm{d}x^*\mathrm{d}y^*\mathrm{d}z^*=\iiint\limits_{\Omega^*}z^*\,\mathrm{d}x^*\mathrm{d}y^*\mathrm{d}z^*=0$，故

$$
I=2(a+b+c)\iiint\limits_{\Omega^*}\mathrm{d}x^*\mathrm{d}y^*\mathrm{d}z^*=\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3
$$

例 19 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,其中 $\boldsymbol{F}=\{x-z,x^3+yz,-3xy^2\}$,$\Sigma$ 是锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xOy 平面的上方部分,取上侧.

解:如图 12-12 所示.

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-z&x^3+yz&-3xy^2\end{vmatrix}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\{-6xy-y,-1+3y^2,3x^2\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(-6xy-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(3y^2-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

曲面 Σ 不封闭,添加 $\Sigma^*:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4\\ z=0\end{cases}$,取下侧,则 $\Sigma+\Sigma^*$ 封闭. P,Q,R 在它们所围的空间域有一阶连续的偏导数,故可用高斯公式.

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}-\iint\limits_{\Sigma^*}=\iiint\limits_{\Omega}(-6y+6y+0)\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma^*}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=12\pi$$

例 20 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ:锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被两平面 $z=1,z=2$ 所截部分,取下侧.

解:如图 12-13 所示.

$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$,$z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,$z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,由点积法

$$I=\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\{y,-x,z^2\}\cdot\left\{-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=-\frac{15}{2}\pi$$

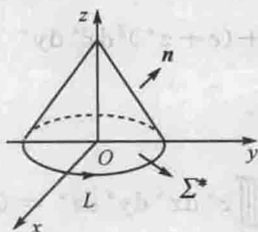


图 12-12

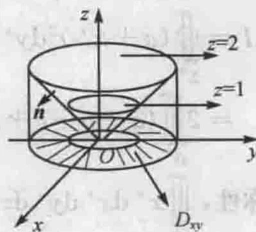


图 12-13

例 21 设 $f(x,y,z)$为连续函数,计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x+f)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+2f)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四象限内部分.

解:如图 12-14 所示. Σ:$x-y+z=1$, $z'_x=-1$, $z'_y=1$.

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}(x+f)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+2f)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Sigma}\{x+f,y+2f,z+f\}\cdot\{1,-1,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

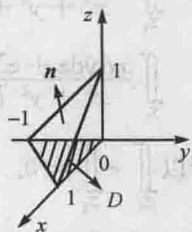


图 12-14

例 22 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与两平面 $z=1,z=2$ 所围形体的外侧.

解:如图 12-15 所示. $P=Q=0,R=\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}$在曲面所围成的空间域 Ω 中的偏导非连续,所以不能用高斯公式.

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$,于是 $I=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}$.

$$\iint_{\Sigma_1}=\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^2\iint_{D_1}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{1}{\rho}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=4\pi\mathrm{e}^2$$

$$\iint_{\Sigma_2}=\iint_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{\mathrm{e}^{\rho}}{\rho}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=-2\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})$$

$$\iint_{\Sigma_3}=\iint_{\Sigma_3}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\mathrm{e}\iint_{D_3}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\mathrm{e}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{\rho}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=-2\pi\mathrm{e}$$

故 $I=2\pi\mathrm{e}^2$.

例 23 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 Σ: 柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与两平面 $z=R,z=-R$ $(R>0)$所围形体的外侧.

解:如图 12-16 所示. 因为(0,0,0)为 Σ 内的奇点,所以虽然是封闭区域,但不能用高斯公式,用投影法.

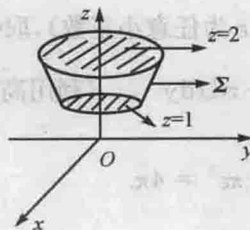


图 12-15

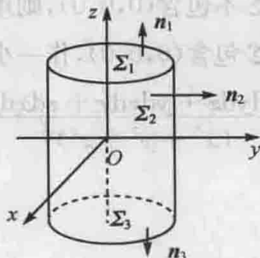


图 12-16

$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$，于是 $I = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_3}$. 其中

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2} = \iint\limits_{D:x^2+y^2=R^2} \frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{\Sigma_3} \frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2} = -\iint\limits_{D:x^2+y^2=R^2} \frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_3} = 0$.

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} \quad （因为在 \Sigma_2 上，\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0）$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_2前} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} + \iint\limits_{\Sigma_2后} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_2前} \frac{\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2} + \iint\limits_{\Sigma_2后} \frac{-\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$= \iint\limits_{D^*:\begin{cases}-R\leqslant y\leqslant R\\ -R\leqslant z\leqslant R\end{cases}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2} + \iint\limits_{D^*:\begin{cases}-R\leqslant y\leqslant R\\ -R\leqslant z\leqslant R\end{cases}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$= 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$= 8\int_0^R \sqrt{R^2-y^2} \cdot \frac{\arctan \frac{z}{R}}{R}\Bigg|_0^R \mathrm{d}y$$

$$= 8 \times \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{R} = \frac{\pi^2 R}{2}$$

例 24 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是不经过 $(0,0,0)$ 的任一简单光滑闭曲面外侧.

解：当 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ 时，$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

(1) 若 Σ 不包含 $(0,0,0)$，则用高斯公式，可得 $I=0$.

(2) 若 Σ 包含 $(0,0,0)$，作一小球面 $\Sigma^*: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon$ 为任意小正数），取外侧，则

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\varepsilon^3} \iint\limits_{\Sigma^*} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad （利用高斯公式）$$

$$= \frac{3}{\varepsilon^3} \iiint\limits_{\Omega^*} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 = 4\pi.$$

题型 125 应用题

思路启迪：(1) 求曲面面积.

适用于：曲面在某坐标面上的投影为一条曲线的情形，如图 12－17 所示.

曲面在 xOy 面的投影为一条曲线 L，若曲线 L^* 上点的竖坐标是曲线 L 上点 $P(x,y)$ 的函数，即 $z=f(x,y)(\geqslant 0)$，则所求曲面面积为

$$A=\int_L f(x,y)\mathrm{d}l$$

图 12－17

(2) 求质心、转动惯量. 设 μ 为线密度，L 为物体形状，则

$$\text{质心坐标为}\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\int_L x\mu\mathrm{d}s}{\int_L \mu\mathrm{d}s}\\ \bar{y}=\dfrac{\int_L y\mu\mathrm{d}s}{\int_L \mu\mathrm{d}s}\end{cases}，\text{转动惯量为}\begin{cases}I_x=\int_L y^2\mu\mathrm{d}s\\ I_y=\int_L x^2\mu\mathrm{d}s\\ I_o=\int_L (x^2+y^2)\mu\mathrm{d}s\end{cases}$$

关于空间曲线 L，曲面 Σ 也有类似公式.

(3) 求功. 平面力场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$，将单位质点沿曲线 L 从点 A 移动到点 B 所做的功为

$$W=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

例 25 求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的侧面积.

解：要求的是柱面的侧面积，因此，用对弧长的曲线积分计算方便.

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，由于对称性，$A=8\int_L\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}l$.

$L:\begin{cases}x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\\ z=0\end{cases}$，其参数方程为 $L:\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t, 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\\ z=0\end{cases}$

$\mathrm{d}l=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,\mathrm{d}t=3\sin t\cos t\mathrm{d}t$. 故

$$\begin{aligned}A&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^6 t-\sin^6 t}\cdot 3\sin t\cos t\mathrm{d}t\\&=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin^2 t\cos^2 t}\sin t\cos t\mathrm{d}t\\&=24\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=6\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2t)\mathrm{d}t=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi\end{aligned}$$

例 26 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$，其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，它的线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求：

(1) 它关于 z 轴的转动惯量；

(2) 它的质心.

解：(1) $I_z=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}l$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}\left(a^2+\frac{4}{3}k^2\pi^2\right)$$

(2) $$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}l}{\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}l}=\frac{\int_0^{2\pi}a\cos t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{4\pi ak^2\sqrt{a^2+k^2}}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4k^2\pi^2)}=\frac{6ak^2}{3a^2+4k^2\pi^2}$$

$$\bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y,z)\mathrm{d}l}{\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}l}=\frac{\int_0^{2\pi}a\sin t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{-4\pi^2ak^2\sqrt{a^2+k^2}}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4k^2\pi^2)}=-\frac{6\pi ak^2}{3a^2+4k^2\pi^2}$$

$$\bar{z}=\frac{\int_L z\rho(x,y,z)\mathrm{d}l}{\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}l}=\frac{\int_0^{2\pi}kt(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{2\pi^2k\sqrt{a^2+k^2}(a^2+2\pi^2k^2)}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4k^2\pi^2)}=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4k^2\pi^2}$$

故质心为$\left(\frac{6ak^2}{3a^2+4k^2\pi^2}, -\frac{6\pi ak^2}{3a^2+4k^2\pi^2}, \frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4k^2\pi^2}\right)$.

例 27 质点 P 沿着以 AB 为半径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点(3,4)的过程中受力$\boldsymbol{F}$作用，$\boldsymbol{F}$的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于$\frac{\pi}{2}$，求变力$\boldsymbol{F}$对质点 P 所做的功.

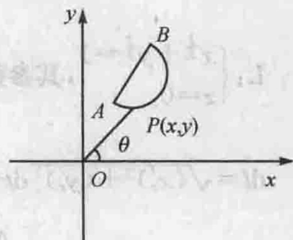


图 12－18

解：如图 12－18 所示. 设 P 点坐标为(x,y)，由题意可知

$$\boldsymbol{F}=|F|\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\boldsymbol{i}+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\boldsymbol{j}\right]$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}[-\sin\theta\,\boldsymbol{i}+\cos\theta\,\boldsymbol{j}]$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\left[-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}\right]=-y\,\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$$

圆弧$\widehat{AB}$的参数方程是

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}\cos\theta \\ y = 3 + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \quad \left(-\frac{3}{4}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{4}\pi\right)$$

故变力$\boldsymbol{F}$对质点 P 所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\widehat{AB}} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} [\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta + \sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} (3\sqrt{2}\sin\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta + 2)\mathrm{d}\theta \\ &= -6 + 4 + 2\pi = 2\pi - 2 \end{aligned}$$

题型 126　场论初步

思路启迪：(1) 方向导数

设三元函数 $U=f(x,y,z)$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点可微，过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点的有向线段 l 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则 u 在 P 点沿 l 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P$$

(2) 梯度(**grad** u)

设数量场 $u=f(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，则 u 在 $P(x,y,z)$ 点的梯度为

$$\mathbf{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

注：梯度的大小为该点处方向导数的最大值.

(3) 散度(div $\boldsymbol{A}$)

设有一向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，其中 P,Q,R 均可导，则 $\boldsymbol{A}$ 在 $M(x,y,z)$ 点处的散度为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

(4) 旋度(**rot** $\boldsymbol{A}$)

设有一向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，其中 P,Q,R 均有连续的一阶偏导数，则旋度为

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

(5) 通量

设有一向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则沿场中有向曲面 Σ 某一侧的曲面积分 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 Σ 这一侧的通量.

例 28 填空题.

(1) 函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在点 M 处的外法线方向 l 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_M=$________.

(2) 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=$________.

(3) 设向量场 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$，则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$________.

解：(1) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，曲面在点 M 处的外法线方向 l 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta=\left.\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\gamma=-\left.\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_M=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

所以 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(2) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\qquad\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

故 $\mathbf{grad}\,u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{j}+\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{k}$.

下面求 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)$.

由上可知，$P=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$，$Q=\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$，$R=\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\qquad\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\qquad\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{y^2+x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

故 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

(3) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\xy^2&ye^z&x\ln(1+z^2)\end{vmatrix}=-ye^z\boldsymbol{i}-\ln(1+z^2)\boldsymbol{j}-2xy\,\boldsymbol{k}.$$

例 29 设 $u=x+y+z$,求沿单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上任一点处的法向量的方向导数,何处的方向导数最大?何处最小?何处为零?

解:单位球面上 $M(x,y,z)$ 处的外法线方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{2x,2y,2z\}$,方向余弦为

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{x,y,z\} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=1$$

所以沿单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的法向量的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=x+y+z$$

因为 $x^2+y^2+z^2=1$,于是令 $F(x,y,z)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$,解方程组

$$\begin{cases}F'_x=1+2\lambda x=0\\F'_y=1+2\lambda y=0\\F'_z=1+2\lambda z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

可得 $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,$P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

由实际问题可知方向导数在 P_1 点处最大,在 P_2 点处最小,在 $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 处方向导数为零.

例 30 流体在空间流动,流体的密度 μ 处处相同(设 $\mu=1$).已知流速函数为 $\boldsymbol{v}=xz^2\boldsymbol{i}+yx^2\boldsymbol{j}+zy^2\boldsymbol{k}$,求流体在单位时间内流过曲面 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=2z$ 的流量.

解:设 $P=xz^2$,$Q=yx^2$,$R=zy^2$,$\Sigma:x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 为球面,则所求流量为

$$\begin{aligned}\Phi&=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\\&=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}\sin\varphi\cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{32}{15}\pi\end{aligned}$$

第 13 章　函数方程与不等式证明

13.1　函数方程

题型 127　利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求函数方程

例 1　设 $f'(-x)=x[f'(x)-1]$,求 $f(x)$.

解:令 $x=-t$,则 $f'(t)=-t[f'(-t)-1]$,即 $f'(x)=-x[f'(-x)-1]$,可推出

$$xf'(-x)+f'(x)=x \tag{1}$$

由已知可得

$$f'(-x)-xf'(x)=-x \tag{2}$$

将式(1)、(2)联立解方程组得

$$f'(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$$

积分得 $f(x)=x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x+C$,其中 C 为任意常数.

例 2　设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$,且当 $y=1$ 时,$z=x$,求 $f(x)$的表达式.

解:将 $y=1$ 时,$z=x$ 代入方程,得 $x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$,即 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$,可推出

$$z=\sqrt{y}+x-1$$

现在求 $f(x)$的表达式.

令 $\sqrt[3]{x}-1=t$,则 $x=(t+1)^3$,代入 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$,可得

$$f(t)=(t+1)^3-1=t^3+3t^2+3t$$

即

$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$

题型 128　利用极限求函数方程

思路启迪:观察极限式的形式,确定类型,然后求解.

例 3　设函数 $f(x)$为多项式,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-8x^5}{2x^2+3x+1}=4$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$,求 $f(x)$.

解:由$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-8x^5}{2x^2+3x+1}=4$ 可知,$f(x)-8x^5$ 中 x 的最高次数为 2,且二次项系数为 8,则设

$$f(x)=8x^5+8x^2+ax+b \tag{1}$$

由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$ 可推得$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,则 $b=0$. 式(1)变为

$$f(x)=8x^5+8x^2+ax \tag{2}$$

将式(2)代入$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$,可得$a=3$.

所以
$$f(x)=8x^5+8x^2+3x$$

题型 129　已知函数在一点的导数及函数方程,求函数方程

思路启迪:"函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$f'(x_0)$存在"是必不可少的前提条件,再加上附加条件,结合导数的极限定义式求$f(x)$. 注意解题时要想办法凑出导数的极限定义式.

例 4　设$f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义,且$f'(1)=a(a\neq 0)$,又对任意$x,y\in(0,+\infty)$,有$f(xy)=f(x)+f(y)$,求$f(x)$.

解:在$f(xy)=f(x)+f(y)$中,令$y=1$,得$f(x)=f(x)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$. 又

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+xy)-f(x)}{xy}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)+f(1+y)-f(x)}{xy}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}f'(1)=\frac{a}{x}$$

即$f'(x)=\dfrac{a}{x}$,两边积分得

$$f(x)=a\ln x+C$$

令$x=1$,于是

$$f(1)=a\ln 1+C\Rightarrow C=0$$

故
$$f(x)=a\ln x$$

题型 130　已知函数方程中含有变上限积分,求函数方程

思路启迪:对变上限积分求导.

例 5　设函数$f(x)$二阶可导,且有$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$,求$f(x)$.

解:对于被积式中的抽象函数,一般通过变量替换将其化为$f(u)$的形式.

令$u=t-x$则$t=0$时,$u=-x$;$t=x$时,$u=0$,$\mathrm{d}u=\mathrm{d}t$,所以

$$\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0(u+x)f(u)\mathrm{d}u=-\int_0^{-x}(u+x)f(u)\mathrm{d}u$$

所以$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x}(t+x)f(t)\mathrm{d}t$,此式两边对$x$求导得

$$1=f(x)-\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

式(1)两边再对x求导得

$$0=f'(x)+f(-x) \tag{2}$$

式(2)对x再求导得

$$0=f''(x)-f'(-x) \tag{3}$$

在式(2)中令 $x=-t$,可得 $f'(-t)=-f(t)$,即 $f'(-x)=-f(x)$,代入式(3)得

$$f''(x)+f(x)=0$$

这是二阶常系数齐次线性微分方程,特征方程为 $\lambda^2+1=0$,解之得 $\lambda_1=\mathrm{i},\lambda_2=-\mathrm{i}$.
所以 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

由式(1)可知 $f(0)=1$,由式(2)可知 $f'(0)=-1$,代入 $f(x)$ 中可得 $C_1=1,C_2=-1$,故

$$f(x)=\cos x-\sin x$$

例 6 设 $f(x)$ 可导,且有 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$.

解:方程两边对 x 求导,得

$$f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^x f^2(x)$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{f(x)}+\mathrm{e}^x\Rightarrow-\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{f(x)}+\mathrm{e}^x$$

令 $\frac{1}{f(x)}=z$,则可推出

$$z'+z=-\mathrm{e}^x$$

利用一阶线性微分方程求解公式得

$$z=\mathrm{e}^{\int-\mathrm{d}x}\left[\int(-\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{-x}$$

即 $f(x)=-\frac{2}{\mathrm{e}^x-2C\mathrm{e}^{-x}}$,又 $f(0)=1\Rightarrow C=\frac{3}{2}$,故 $f(x)=-\frac{2}{\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^{-x}}$.

例 7 设函数 $f(x)$ 可导,对任何实数 x,h 满足 $f(x)\neq0$,且 $f(x+h)=\int_x^{x+h}\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t+f(x)$,又 $f(1)=\sqrt{2}$,求 $f(x)$.

解:$f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h}\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t=h\frac{\xi(\xi^2+1)}{f(\xi)}$,$x\leqslant\xi\leqslant x+h$(由积分中值定理得)

当 $h\neq0$ 时,$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\xi(\xi^2+1)}{f(\xi)}$,两边取极限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\xi(\xi^2+1)}{f(\xi)}$$

得 $f'(x)=\frac{x(x^2+1)}{f(x)}$,即

$$f'(x)f(x)=x(x^2+1)$$

积分得 $\frac{1}{2}f^2(x)=\frac{1}{4}(x^2+1)^2+\frac{C}{2}$,即

$$f^2(x)=\frac{(x^2+1)^2}{2}+C$$

令 $x=1$ 得 $C=0$,于是 $f^2(x)=\frac{(x^2+1)^2}{2}$,又 $f(1)=\sqrt{2}>0$,故

$$f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$$

例 8 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,满足方程

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\qquad x_1\neq x_2,\text{且 }x_1,x_2\in[a,b]$$

求 $f(x)$.

解：由题设可知，对 $x\in[a,b]$，有

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[f(a)+f(x)]$$

即 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x-a}{2}[f(a)+f(x)]$. 方程两边对 x 求导得

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(a)+f(x)]+\frac{x-a}{2}f'(x)$$

即 $f'(x)=\frac{1}{x-a}f(x)-\frac{1}{x-a}f(a)$. 解此一阶线性微分方程得

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x}\left\{\int\left[-\frac{1}{x-a}f(a)\right]\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right\}\\&=(x-a)\left[\frac{f(a)}{x-a}+C\right]=f(a)+C(x-a)\end{aligned}$$

令 $x=b$，得 $f(b)=C(b-a)+f(a)$，即 $C=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，故

$$f(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\qquad x\in[a,b]$$

例 9　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 为正实值可导函数，且 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的平均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均值，求 $f(x)$.

解：由题设可知 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sqrt{f(0)f(x)}$，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sqrt{f(0)}\,x\sqrt{f(x)}$.

式两边求导得

$$f(x)=\sqrt{f(0)}\left[\sqrt{f(x)}+\frac{xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\right]$$

即 $f'(x)=-\frac{2}{x}f(x)+\frac{2}{\sqrt{f(0)}\,x}f^{\frac{3}{2}}(x)$. 此为伯努利方程.

令 $z=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{f'(x)}{2[f(x)]^{\frac{3}{2}}}$，于是原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{x}-\frac{1}{\sqrt{f(0)}\,x}$$

解上述一阶线性微分方程得

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int-\frac{1}{x\sqrt{f(0)}}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left[\frac{1}{x\sqrt{f(0)}}+C\right]=\frac{1}{\sqrt{f(0)}}+Cx$$

即

$$f(x)=\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{f(0)}}+Cx}\right)^2=\frac{f(0)}{(1+C_1x)^2}$$

令 $x=1$，则 $f(1)=\frac{f(0)}{(1+C_1)^2}$，得 $C_1=\sqrt{\frac{f(0)}{f(1)}}-1$，故

$$f(x)=\frac{f(0)}{\left[1+\left(\sqrt{\frac{f(0)}{f(1)}}-1\right)x\right]^2}$$

题型 131　已知函数连续，且函数式中含函数的定积分、极限或二重积分，求函数方程

思路启迪：利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解，一般做法是令定积分或极限或重积分等于常数 l，然后再积分或求极限.

例 10　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解：令 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=l$，则 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\,l$，两边平方得

$$f^2(x)=9x^2-6x\sqrt{1-x^2}\,l+(1-x^2)l^2$$

上式在 $[0,1]$ 上积分得

$$l=\int_0^1 9x^2\mathrm{d}x-l\int_0^1 6x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+l^2\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=3+2l(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+l^2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=3-2l+\frac{2}{3}l^2$$

即 $\frac{2}{3}l^2-3l+3=0$，解之得 $l_1=\frac{3}{2}$，$l_2=3$，故

$$f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}\quad\text{或}\quad f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$$

例 11　设 $f(x)=9x-2\lim\limits_{x\to1}f(x)+3\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$，$g(x)=3\lim\limits_{x\to1}f(x)+2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x+6x^2$，求 $f(x)$ 和 $g(x)$.

解：令 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=l$，$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=s$，于是有

$$\begin{cases}f(x)=9x-2l+3s\\g(x)=3l+2s+6x^2\end{cases}$$

第一个方程两边取 $x\to1$ 的极限，第二个方程两边在 $[0,1]$ 对 x 积分，可得 $\begin{cases}l=9-2l+3s\\s=3l+2s+2\end{cases}$，解之得

$$l=\frac{1}{4}\qquad s=-\frac{11}{4}$$

故

$$f(x)=9x-\frac{35}{4}\qquad g(x)=6x^2-\frac{19}{4}$$

例 12　设闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant0$，$f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

求 $f(x,y)$.

解：记 $A=\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，则 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A$.

式两边分别在 D 上作二重积分得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D\frac{8}{\pi}A\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8}{\pi}A\cdot\frac{\pi}{8}$$

即 $A=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-A$. 所以

$$A=\frac{1}{2}\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

因此
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

题型 132*　已知函数方程中含有偏导数条件或曲线积分与路径无关,求函数方程

思路启迪:建立微分方程,利用解微分方程的方法求解.

例 13　设 $u=f(xyz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(xyz)$, 求 $f(x)$.

解:令 $t=xyz$, $u=f(t)$, 则 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=t^2f'''(t)$, 而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\frac{\partial t}{\partial x}=yzf'(t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=zf'(t)+yzf''(t)xz=zf'(t)+xyz^2f''(t)$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=f'(t)+zf''(t)xy+2xyzf''(t)+xyz^2f'''(t)xy$$
$$=f'(t)+3tf''(t)+t^2f'''(t)=t^2f'''(t)$$

则 $3tf''(t)+f'(t)=0$.

令 $p=f'(t)$, 则 $3tp'+p=0$, 两边积分得:$p=ct^{-\frac{1}{3}}$, 即 $f'(t)=ct^{-\frac{1}{3}}$, 再积分得

$$f(t)=-\frac{3c}{2}t^{\frac{2}{3}}+C_2=C_1t^{\frac{2}{3}}+C_2$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

例 14　设曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left[\mathrm{e}^x(x+1)^n+\frac{n}{x+1}f(x)\right]y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

解:$P(x,y)=\left[\mathrm{e}^x(x+1)^n+\frac{n}{x+1}f(x)\right]y$, $Q(x,y)=f(x)$,

由题设,曲线积分与路径无关,所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 则

$$\mathrm{e}^x(x+1)^n+\frac{n}{x+1}f(x)=f'(x)$$

即 $f'(x)-\frac{n}{x+1}f(x)=\mathrm{e}^x(x+1)^n$, 根据一阶线性微分方程求解公式可得

$$f(x)=e^{\int\frac{n}{x+1}dx}\left[\int e^x(x+1)^n e^{-\int\frac{n}{x+1}dx}dx+C\right]$$
$$=(x+1)^n[e^x+C]$$

其中 C 为任意常数.

13.2 不等式证明

题型 133 存在一个点 $\xi\in(a,b)$,使得不等式成立或不等式通过变形,一端可写成 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 的命题的证明

思路启迪:利用拉格朗日中值定理证明.

例 15 设 $b>a>0$,证明:$\dfrac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\dfrac{b-a}{1+a^2}$.

证:令 $f(x)=\arctan x$,由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则根据拉格朗日中值定理可知,存在一个点 $\xi\in(a,b)$,使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$,即

$$\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}=\frac{1}{1+\xi^2}$$

因为 $a<\xi<b$,并且 $b>a>0$,所以 $1+a^2<1+\xi^2<1+b^2\Rightarrow\dfrac{1}{1+b^2}<\dfrac{1}{1+\xi^2}<\dfrac{1}{1+a^2}$;故

$$\frac{1}{1+b^2}<\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}<\frac{1}{1+a^2},\text{ 即}\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$$

例 16 设 $f''(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上存在,且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值. 证明:存在一个点 $\xi\in(0,a)$,使得 $|f''(\xi)|\geqslant\dfrac{1}{a}|f'(a)-f'(0)|$.

证:由题设知,存在一个 $\tau\in(0,a)$,使得 $f(\tau)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}\{f(x)\}$,又 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续且可导(因为 $f''(x)$ 在 $[0,a]$ 上存在),则根据费尔马定理知 $f'(\tau)=0$,又由题设知,$f''(x)$ 在 $[0,a]$,$a>0$ 上存在,则 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.

由拉格朗日中值定理知,存在 $\xi_1\in(0,\tau)$,$\xi_2\in(\tau,a)$,使

$$f'(0)=f'(0)-f'(\tau)=(0-\tau)f''(\xi_1)=-\tau f''(\xi_1)$$
$$f'(a)=f'(a)-f'(\tau)=(a-\tau)f''(\xi_2)$$

则 $f'(a)-f'(0)=(a-\tau)f''(\xi_2)+\tau f''(\xi_1)$,两边取绝对值,得

$$|f'(a)-f'(0)|=|(a-\tau)f''(\xi_2)+\tau f''(\xi_1)|\leqslant(a-\tau)|f''(\xi_2)|+\tau|f''(\xi_1)|$$

令 $\xi=\begin{cases}\xi_1,|f''(\xi_1)|\geqslant|f''(\xi_2)|\\ \xi_2,|f''(\xi_2)|\geqslant|f''(\xi_1)|\end{cases}$,即 $|f''(\xi)|=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$,于是

$$|f'(a)-f'(0)|\leqslant[(a-\tau)+\tau]|f''(\xi)|$$

即
$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{1}{a}|f'(a)-f'(0)|$$

题型 134　在某一区间(a,b)不等式命题成立的证明

思路启迪：方法 1　利用函数的单调增减性，一般需作辅助函数，具体证题程序如下：

(1) 通过移项或恒等变形后移项使不等式一端为零，另一端即为所作的辅助函数$F(x)$. 注意：由于要对所作辅助函数 $F(x)$求导，所以要求其分母不含对数函数和反三角函数，避免求导麻烦！

(2) 求 $F'(x)$，判别其符号，从而得出 $F(x)$的单调增减性.

(3) 求出 $F(a)$、$F(b)$或 $F_+(a)$、$F_-(b)$，其中至少有一个为零或知道其符号.

(4) 由(2)、(3)即可得出证明.

方法 2　辅助函数的作法与方法 1 的类似，但是 $F(x)$比较的不是函数的端点值，而是极值与最值. 具体方法：

(1) 作辅助函数 $F(x)$；

(2) 求 $F(x)$在区间内的最大值或最小值；

(3) 由方法 2 中的(2)即可得出证明.

例 17　证明：当$0<x<1$时，$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

分析：原不等式$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}\Leftrightarrow(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x>0\ (0<x<1)$

证：令 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$，则

$$F'(x)=\ln(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x-\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\ln(1+x)+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x>0\qquad x\in(0,1)$$

所以函数 $F(x)$在区间$(0,1)$单调增加，而且 $F_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，所以对任意的$0<x<1$，有 $F(x)>F_+(0)=0$，即$(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x>0$，故对于$0<x<1$，$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$成立.

例 18　证明：对任意实数 x，有 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$.

证：令 $F(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则

$$F'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

令 $F'(x)=0$，得 $x=0$，$F''(0)=\left.\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0}=1>0$.

所以 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内唯一的极小值点，于是 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的最小值点，即 $F(x)\geqslant F(0)=0$，故对任意实数 x，有 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$.

例 19 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，对任意的 $x\in(0,1)$，$0<f'(x)\leqslant 1$. 证明：$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$.

证：令
$$F(t)=\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right]^2-\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

则
$$F'(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\cdot f(t)-f^3(t)=\left[2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^2(t)\right]f(t)\triangleq\varphi(t)f(t) \tag{2}$$

对 $\varphi(t)$ 求导得
$$\varphi'(t)=2f(t)-2f(t)f'(t)=2f(t)[1-f'(t)]$$

由题设知，对任意的 $x\in(0,1)$，$0<f'(x)\leqslant 1$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 严格单调递增，又由题设知 $f(0)=0$，所以对于任意的 $t\in(0,1)$，有 $f(t)>0$，所以 $\varphi'(t)\geqslant 0$，即 $\varphi(t)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递增，由式(2)可知，$\varphi(0)=0$，所以对于任意的 $t\in(0,1)$，有 $\varphi(t)\geqslant 0$，从而 $F'(t)\geqslant 0$；由式(1)可知，$F(0)=0$，所以对于任意的 $t\in(0,1)$，有 $F(t)\geqslant 0$，取 $t=1$，即 $\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$ 成立.

题型 135　文字不等式的证明

思路启迪：转化为函数不等式证明. 方法如下：

分析或观察 a,b 出现的次数，若某个大于等于 2，则该文字设为 x，移项(有时需要作其他简单变形)，使不等式一端为零，而另一端即为所作函数. 然后利用函数的单调增减性来证明不等式.

例 20 设 $b>a>0$，证明：$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$.

分析：原不等式 $\Leftrightarrow(a+b)(\ln b-\ln a)-2(b-a)>0$.

将 b 改为 x，则文字不等式转化为函数不等式 $(a+x)(\ln x-\ln a)-2(x-a)>0$，$x>a$.

证：令 $F(x)=(a+x)(\ln x-\ln a)-2(x-a)$，$x>a$，则 $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且
$$F'(x)=\ln x-\ln a+(a+x)\frac{1}{x}-2=\ln x-\ln a+\frac{a}{x}-1$$
$$F''(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}>0$$

所以，当 $x>a$ 时，$F'(x)$ 单调增加，即
$$F'(x)>F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}F'(x)=0$$

于是 $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调增加，所以，对 $b>a>0$，有
$$F(b)>F_+(a)=\lim_{x\to a^+}F(x)=0$$

由此得到
$$(a+b)(\ln b-\ln a)-2(b-a)>0$$

即
$$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$$

例 21　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$.

证：令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t-(x-a)^2$，于是

$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x)\int_a^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t+\frac{1}{f(x)}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2(x-a)\\&=\int_a^x\frac{f(x)}{f(t)}\mathrm{d}t+\int_a^x\frac{f(t)}{f(x)}\mathrm{d}t-\int_a^x 2\mathrm{d}t\\&=\int_a^x\left[\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}-2\right]\mathrm{d}t\geqslant 0\end{aligned}$$

上式因为 $f(x)>0$，所以 $\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}\geqslant 2$. 所以 $F(x)$ 单调增加，于是，当 $b\geqslant a$ 时，有 $F(b)\geqslant F(a)=0$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

题型 136　函数 $f(x)$ 二阶和二阶以上可导的不等式命题的证明

思路启迪：利用泰勒公式证明. 证题程序如下：

(1) 写出比最高阶导数低一阶的泰勒公式；

(2) 恰当选择等式两边 x 与 x_0（不要认为展开点一定以 x_0 为最合适，有时以 x 为佳），即可选：

左边 $=f(x)$；右边 $=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots$

有时为了方便，也可写成：

左边 $=f(x_0)$；右边 $=f(x)+f'(x)(x_0-x)+\cdots$

(3) 根据所给的最高阶导数的大小或界对展开式进行放缩.

例 22　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，$f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\leqslant A$.
证明：$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$.

证：将 $f(x)$ 展成一阶泰勒公式：

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x)^2\tag{1}$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x)^2\tag{2}$$

式(2)减式(1)得：$f'(x)=\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$，且 $|f''(x)|\leqslant A$，则

$$|f'(x)|\leqslant\frac{|f''(\xi_1)|}{2}x^2+\frac{|f''(\xi_2)|}{2}(1-x)^2\leqslant\frac{A}{2}x^2+\frac{A}{2}(1-x)^2=\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]$$

令 $\varphi(x)=x^2+(1-x)^2$，$x\in(0,1)\Rightarrow\max\limits_{0<x<1}\{\varphi(x)\}=1$，故

$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$$

例 23 设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geqslant\frac{1}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证：$f(x)$ 在 $x_0\in[a,b]$ 处的一阶泰勒展开式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-x_0)^2 \tag{1}$$

令 $x=\frac{a+b}{2}$，$x_0=a$ 代入式(1)得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2$$

$$=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \tag{2}$$

同理可得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \tag{3}$$

式(3)减式(2)得

$$f(b)-f(a)=\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

则

$$|f(b)-f(a)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}\right]$$

取 $\xi=\begin{cases}\xi_1, |f''(\xi_1)|\geqslant|f''(\xi_2)|\\ \xi_2, |f''(\xi_2)|\geqslant|f''(\xi_1)|\end{cases}$，即 $|f''(\xi)|=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$，则

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$$

题型 137 杂 例

1. 利用形似法作辅助函数证明不等式

例 24 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导且有界，又对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|f(x)+f'(x)|\leqslant1$，证明：$|f(x)|\leqslant1$.

分析：由结论很难作出辅助函数，只能从条件 $|f(x)+f'(x)|\leqslant1$ 入手. 令 $f(x)+f'(x)=0$，可得 $e^xf(x)=C$，可作辅助函数 $F(x)=e^xf(x)$.

证：作辅助函数 $F(x)=e^xf(x)$，则 $F'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$. 得 $|F'(x)|\leqslant e^x$，即 $-e^x\leqslant F'(x)\leqslant e^x$，则有

$$-\int_{-\infty}^{x}e^x\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^{x}F'(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^{x}e^x\mathrm{d}x$$

$$-e^x\leqslant e^xf(x)-\lim_{x\to-\infty}e^xf(x)=e^xf(x)\leqslant e^x$$

故 $-1\leqslant f(x)\leqslant1$，即 $|f(x)|\leqslant1$.

例 25 证明：$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$.

证：设 $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}(x\geqslant 0)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$. 于是当 $x\geqslant 0$ 时，$\varphi(x)$ 严格单调增加.

又 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，故 $\varphi(|a+b|)\leqslant\varphi(|a|+|b|)$，即

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

2. 利用插值法证明不等式

例 26　设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{a},a\right]$ 上是非负可积且满足 $\int_{-\frac{1}{a}}^{a}xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x$$

分析：作辅助函数 $F(x)=\left(x+\frac{1}{a}\right)(a-x)f(x)\geqslant 0$.

证：令 $F(x)=\left(x+\frac{1}{a}\right)(a-x)f(x)$，$f(x)\geqslant 0$，$x\in\left[-\frac{1}{a},a\right]$，则 $F(x)\geqslant 0$. 所以

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a}F(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

即

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a}\left(x+\frac{1}{a}\right)(a-x)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x+\left(a-\frac{1}{a}\right)\int_{-\frac{1}{a}}^{a}xf(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

又 $\int_{-\frac{1}{a}}^{a}xf(x)\mathrm{d}x=0$，故

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x$$

3. 引入参数法证明不等式

例 27　假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(1)-f(0)=1$，证明：$\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 1$.

分析：因为 $1=f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=1$，可从 $\int_0^1[f'(x)+\lambda]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$ 入手.

证：显然 $\int_0^1[f'(x)+\lambda]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$，即 $\lambda^2+2\lambda+\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$，所以判别式

$$\Delta=4-4\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即

$$\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 1$$

4. 利用变量代换法证明不等式

例 28　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(x)=\int_x^{x+1}\sin\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，证明：$\mathrm{e}^x|f(x)|\leqslant 2$.

证：令 $u=\mathrm{e}^t$，则 $t=\ln u$，$\mathrm{d}t=\frac{1}{u}\mathrm{d}u$. 于是

$$f(x)=\int_x^{x+1}\sin e^t\mathrm{d}t=\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{\cos u}{u}\Big|_{e^x}^{e^{x+1}}-\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\cos e^x}{e^x}-\frac{\cos e^{x+1}}{e^{x+1}}-\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u$$

故

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}+\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}-\frac{1}{u}\Big|_{e^x}^{e^{x+1}}=\frac{2}{e^x}$$

即

$$e^x|f(x)|\leqslant 2$$

第 2 篇　线性代数题型

第 14 章　行列式

● 重要定理、公式和结论

14.1　重要定理和性质

1. 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的性质

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$，行列式转置，值不变；

(2) 交换两行(列)，行列式变号；

(3) $k\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & * & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & * & \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ & * & \end{vmatrix}$，即一个常数乘以行列式等于这个常数乘以该行列式某行元素后所组成的新行列式.

注：$|k\boldsymbol{A}|\neq k|\boldsymbol{A}|$，$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵.

(4) $\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1}\pm b_{i1} & \cdots & a_{in}\pm b_{in} \\ & * & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & * & \end{vmatrix}\pm\begin{vmatrix} & * & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & * & \end{vmatrix}$

注：$|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|\pm|\boldsymbol{B}|$.

(5) 将行列式某行(列)的 k(常数)倍加到另一行(列)上去，其值不变.

注：可利用该性质将行列式变为三角形行列式.

2. 行列式按行(列)展开定理

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

14.2　重要结论

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$；

注：① 一般 $AB\neq BA$，但 $|AB|=|BA|$；

② 若 A,B 为非方阵，则 $|AB|\neq|BA|$.

(2) $|A^{T}|=|A|,|A^{-1}|=|A|^{-1},|A^{*}|=|A|^{n-1}$.

(3) $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$，$A,B$ 皆为方阵.

注：① $\begin{vmatrix} O & A_{m\times m} \\ B_{n\times n} & C \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$（方法为一直作行交换）.

② $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}\neq|AD-BC|$（当且仅当 $AC=CA$，等号成立）.

(4) 范德蒙行列式.（要求记住形式和结论）

形式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$.（所有可能差项相乘）

注：若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 互不相等，则该行列式不等于零.

(5) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，则 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

一般地，设 $f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE$

对应地，$f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$

则 $|f(A)|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$.

(6) $A\sim B$（A,B 相似），则 $|A|=|B|,|f(A)|=|f(B)|$.

注：可通过特征值、矩阵相似求行列式.

●核心题型及思路启迪

题型 138　与行列式的定义和性质相关的命题

思路启迪：行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

注：① n 阶行列式的每一项是 n 个不同行不同列的元素的乘积.

② 第 1 个下标按自然顺序排列，第 2 个下标为一个 n 级排列，即由不同行不同列的 n 个元素的排列，逆序数 $\tau(j_1\cdots j_n)$ 确定符号. 其中任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 可按下式计算：

$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后边比 i_1 小的数的个数 $+i_2$ 后边比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+i_{n-1}$ 后边比 i_{n-1} 小的数的个数

例 1 填空题.

(1) 在 5 阶行列式中,项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取________;

(2) 4 阶行列式中,带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为________;

(3) 如果 n 阶行列式中,负项的个数为偶数,则 $n \geqslant$________;

(4) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n,那么此行列式的值为________;

(5) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中,x^3 的系数是________.

解:(1) 适当调整该项元素位置,使第一个下标按自然顺序排列,则第二个下标的排列为 2 5 1 3 4,其逆序数为 4,故取正号.

(2) 由行列式的定义可知,包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$,其中 i,j 必为 2,4 或 4,2,又此项符号为负,所以 $i\ 3\ 1\ j$ 为奇排列,从而 $i=4,j=2$,故该项为 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

(3) n 阶行列式中,共有 $n!$ 项,其中正、负项各占一半,若负项的个数为偶数,必有 $n \geqslant 4$.

(4) n 阶行列式中,共有 n^2 个元素,若等于零的元素个数大于 n^2-n,那么不等于零的元素个数就小于 n,又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同行不同列的元素的乘积,所以必定为零,故此行列式的值必定为零.

(5) 根据行列式的定义,仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 这 4 个元素相乘时才能出现 x^3 项,这时该项排列的逆序数为 1,故含 x^3 的项系数为 -1.

题型 139 数值型行列式的计算

1. 低阶行列式的计算

思路启迪:(1) 根据行或列的特点,利用行列式的性质化为上(下)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 根据行列式展开定理或分块矩阵的性质降阶求解.

例 2 计算下列行列式.

(1) $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; (2) $D=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$.

解：(1) $D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{[1]\leftrightarrow[3]}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\-1&7&-3&4\\2&-9&5&7\\1&-6&4&2\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{(1)\times(-2)+(3)\\(1)\times(-1)+(4)}]{(1)+(2)}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&2&-1&6\\0&1&1&3\\0&-1&2&0\end{vmatrix}\xlongequal{(2)\leftrightarrow(3)}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&2&-1&6\\0&-1&2&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(2)\times1+(4)]{(2)\times(-2)+(3)}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{(3)\times1+(4)}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-9$$

(2) $D=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[{[3]-[1],[4]-[1]}]{[2]-[1]}\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}\xlongequal{[2]+[4]}\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-1\\4x&-3&x-7&-6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x-2&-1\\x-7&-6\end{vmatrix}=5x(x-1)$$

注：利用性质时，尽量将某些元素化为零，尽量不出现分式. $[j]$表示 j 列；(i)表示 i 行；↔表示行(或列)对调.

2. n 阶行列式的计算

思路启迪：观察 n 阶行列式，一般利用以下方法：

(1) 若行列式中有较多元素为零，则可直接用定义计算.

(2) 若各行(或列)诸元素之和相等，可将各行(或列)加到同一行(或列)中去.

(3) 对于三线型行列式，即除某一行、某一列、对角线或次对角线外，其余元素全为零，一般通过某行(或列)加上其余各行(或列)的一定倍数化为上三角形或下三角形行列式进行计算.

(4) 若所求行列式某一行(或列)至多有两个非零元素，一般对该行(或列)利用行列式按行(或列)展开定理降阶处理.

(5) 利用递推公式或数学归纳法.

(6) 拆分法，就是将行列式适当拆分为若干个同阶行列式之和.

(7) 加边法,就是在值不变的情况下,对原行列式加上一行一列再进行计算.常见的加边方法为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(8) 利用已知行列式进行计算,特别是范德蒙行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \qquad \text{(所有可能差项相乘)}$$

若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相等,则该行列式不等于零.

注:(1)~(4)为常用方法.

例 3　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解:此行列式刚好只有 n 个非零元素 $a_{1\,n-1}, a_{2\,n-2}, \cdots, a_{n-1\,1}, a_{nn}$,故非零项只有一项:$a_{1\,n-1}a_{2\,n-2}\cdots a_{n-1\,1}a_{nn}$,又 $\tau((n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,所以

$$D = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$$

例 4　计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解:观察此行列式后发现,各行或各列元素之和均为 $a+(n-1)b$,于是

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{到第1行}]{\text{各行加}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{[2]-[1],\cdots,[n-1]-[1]}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$ （此时行列式变为下三角形）

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

注：请记住该题的结论.

例 5 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解：观察此行列式后发现，各行或各列元素之和均为$\frac{n(n+1)}{2}$，于是

$$D_n\xlongequal{\text{各列加到第1列}}\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ （从第 n 行开始，后一行减去前一行）

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}[(1-n)+(n-2)\cdot 1][(1-n)-1]^{n-2}$$ （利用例 4 的结论）

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

例 6 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$.

解：此行列式中除主对角线元素外，其余元素均为 2，于是

$$D_n\xlongequal[\text{加到各列上}]{\text{第2列乘}(-1)}\begin{vmatrix}-1&2&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\0&2&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&2&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}\quad(\text{此时，第 1 列只有 }a_{11}=-1\neq 0)$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!$$

例 7 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_{n-1}\end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_{n-1}\neq 0$.

解：由于 $a_1a_2\cdots a_{n-1}\neq 0$，可得 $a_1\neq 0,a_2\neq 0,\cdots,a_{n-1}\neq 0$，所以用下式计算

$$\text{第 1 列}+\left(-\frac{1}{a_1}\right)\times\text{第 2 列}+\left(-\frac{1}{a_2}\right)\times\text{第 3 列}+\cdots+\left(-\frac{1}{a_{n-1}}\right)\times\text{第 } n \text{ 列}$$

于是

$$D_n=\begin{vmatrix}a_0-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}&1&1&\cdots&1\\0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_{n-1}\left(a_0-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)$$

例 8 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_1^n&a_1^{n-1}b_1&a_1^{n-2}b_1^2&\cdots&a_1b_1^{n-1}&b_1^n\\a_2^n&a_2^{n-1}b_2&a_2^{n-2}b_2^2&\cdots&a_2b_2^{n-1}&b_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n^n&a_n^{n-1}b_n&a_n^{n-2}b_n^2&\cdots&a_nb_n^{n-1}&b_n^n\\a_{n+1}^n&a_{n+1}^{n-1}b_{n+1}&a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2&\cdots&a_{n+1}b_{n+1}^{n-1}&b_{n+1}^n\end{vmatrix}$$

其中 $a_i\neq 0,b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n+1)$.

$$\text{解}: D_{n+1}=a_1^n a_2^n\cdots a_n^n a_{n+1}^n\begin{vmatrix}1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n\\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & \frac{b_n}{a_n} & \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^n\\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n\end{vmatrix}$$

$$=a_1^n a_2^n\cdots a_n^n a_{n+1}^n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)$$

题型 140 行列式的余子式或代数余子式线性组合的计算

思路启迪：利用行列式按行(列)展开定理

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}$$

其中 A_{ij} 为代数余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij} 为余子式，是将 a_{ij} 所在行列元素划掉后剩余元素按原来的位置排列组成的行列式.

由行列式按行(列)展开公式可知，反过来，若要求某行(列)的对应元素的代数余子式的线性组合

$k_1A_{j1}+\cdots+k_nA_{jn}$ 或 $l_1A_{1k}+\cdots+l_nA_{nk}$

则有
$$k_1A_{j1}+\cdots+k_nA_{jn}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j-1\,1} & a_{j-1\,2} & \cdots & a_{j-1\,n}\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ a_{j+1\,1} & a_{j+1\,2} & \cdots & a_{j+1\,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

或
$$l_1A_{1k}+\cdots+l_nA_{nk}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1\,k-1} & l_1 & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2\,k-1} & l_2 & a_{2\,k+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,k-1} & l_n & a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

即转化为一个 n 阶行列式的计算.

例 9　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\1&0&2&3\\1&5&2&1\\-1&1&5&2\end{pmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+2A_{43}$.

解：因为 $A_{13}+A_{23}+2A_{43}=A_{13}+A_{23}+0\cdot A_{33}+2A_{43}$

将 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&3&4\\1&0&2&3\\1&5&2&1\\-1&1&5&2\end{vmatrix}$ 的第 3 列转化为 $(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，故

$$A_{13}+A_{23}+0\cdot A_{33}+2A_{43}=\begin{vmatrix}2&1&1&4\\1&0&1&3\\1&5&0&1\\-1&1&2&2\end{vmatrix}=4$$

例 10　设 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}4&4&4&1&1\\3&2&1&4&5\\3&3&3&2&2\\2&3&5&4&2\\4&5&6&1&3\end{vmatrix}$，试求：

(1) $A_{21}+A_{22}+A_{23}$ 及 $A_{24}+A_{25}$；

(2) $A_{31}+A_{32}+A_{33}$ 及 $A_{34}+A_{35}$.

其中 A_{ij} 是 D 的元素 a_{ij} 的代数余子式，$j=1,2,3,4,5$.

解：(1) 由于 $A_{21},A_{22},A_{23},A_{24},A_{25}$ 是 D 的第 2 行各个元素的代数余子式，而第 1 行的前 3 个元素相同，后两个元素相同，此外第 3 行也具有相同特性，所以，将 D 按第 1 行和第 3 行展开，有

$$\begin{cases}a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}+a_{15}A_{25}=0\\a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}+a_{34}A_{24}+a_{35}A_{25}=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4\times(A_{21}+A_{22}+A_{23})+(A_{24}+A_{25})=0\\3\times(A_{21}+A_{22}+A_{23})+2\times(A_{24}+A_{25})=0\end{cases}$$

解方程组得 $A_{21}+A_{22}+A_{23}=0,A_{24}+A_{25}=0$.

(2)由解(1)的分析可得

$$\begin{cases}a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+a_{14}A_{34}+a_{15}A_{35}=0\\a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}+a_{35}A_{35}=D\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4\times(A_{31}+A_{32}+A_{33})+(A_{34}+A_{35})=0\\3\times(A_{31}+A_{32}+A_{33})+2\times(A_{34}+A_{35})=9\end{cases}$$

解方程组得 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=-\dfrac{9}{5},A_{34}+A_{35}=\dfrac{36}{5}$.

例 11　设 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，求它的第 4 行各元素的余子式 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$ 之和. 其中 M_{4j} 是 D 的元素 a_{4j} 的余子式，$j=1,2,3,4$.

解：由于 $a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44}=D$，所以

$$a_{41}(-M_{41})+a_{42}M_{42}+a_{43}(-M_{43})+a_{44}M_{44}=D \tag{1}$$

当 $a_{41}=-1,a_{42}=1,a_{43}=-1,a_{44}=1$ 时，式(1)左边成为 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$，于是

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-28$$

题型 141　计算抽象行列式

思路启迪：(1) 利用行列式的性质；

(2) 利用特征值、相似矩阵的性质计算行列式.

① 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

一般地，设　$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{E}$

对应地，　$f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$

则 $|f(\boldsymbol{A})|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$.

② $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似)，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，$|f(\boldsymbol{A})|=|f(\boldsymbol{B})|$.

例 12　填空题.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=-2$，把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(A_1,A_2,A_3)$，其中 $A_j(j=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列，则 $|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=$________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^2\right|=$________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 4 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{B}|=-2$，则 $\big||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\big|=$________.

(4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量，且 4 阶行列式 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)|=m$，$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=n$，则 4 阶行列式 $|(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|=$________.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解：(1) 此题需要综合应用行列式的性质.

$$\begin{aligned}|A_3-2A_1,3A_2,A_1|&=|A_3,3A_2,A_1|+|-2A_1,3A_2,A_1|\\&=|A_3,3A_2,A_1|+0\\&=-|A_1,3A_2,A_3|\\&=-3|A_1,A_2,A_3|=-3|\boldsymbol{A}|=6\end{aligned}$$

(2) $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^2\right|=\left|\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^2\right|=\left(\frac{1}{4}\right)^3|\boldsymbol{A}|^2=\frac{1}{4}$.

(3) $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|^3|\boldsymbol{A}|=(-2)^3\cdot 1=-8$.

(4) 利用行列式的性质,有

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|&=|(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)|+|(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2)|\\&=-|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)|+|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=n-m\end{aligned}$$

(5) 由题设进行转化

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\end{aligned}$$

于是有 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times 2=2$.

注:第(5)小题中已知行列式$|\boldsymbol{A}|$,要求与之相关的行列式$|\boldsymbol{B}|$时,要想到利用矩阵的性质写出矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的线性表示式,关键是转化为用矩阵乘积形式表示. 一般地,若

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\beta}_2&=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n\\&\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m&=a_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{aligned}$$

则有
$$(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

例 13 填空题.

(1) 若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2,3,4,5,则行列式$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=$________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$,则行列式$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=$________.

解:(1) 根据相似矩阵有相同的特征值,导出矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也为 2,3,4,5. 因此 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 1,2,3,4, 于是 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 的行列式等于其特征值之积,即$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=24$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 2;若取垂直于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的两个线性无关的三维向量 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$,则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_1=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_1)=\boldsymbol{0}$;同理,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_2=0$,所以 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 因此,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2,0,0,于是 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n$ 的特征值为 $1-2^n$,1,1,故$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=1-2^n$.

例 14 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 3 阶矩阵,2,3,4 为 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&1\\1&2&-2\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足式 $\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,求行列式$|\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{BA}|$.

解:本题要求$|\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{BA}|$,但是条件中没有 $\boldsymbol{BA}$,可利用行列式的性质进行转换.

$$|\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})|=|(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{AB}|$$

而 $B^2+AB=E+B-A-AB=(E+B)(E-A)$,所以

$$|B^2+AB|=|E+B||E-A|$$

因为

$$|E+B|=\begin{vmatrix}2&0&0\\2&4&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=-12$$

$$|E-A|=(1-2)(1-3)(1-4)=-6$$

所以 $|B^2+BA|=|B^2+AB|=|E+B||E-A|=(-12)\cdot(-6)=72$.

例 15 已知 3 阶非零实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式,$r(A+E)=2$,方程组 $(A+2E)x=0$ 存在非零解,求行列式 $|A-E|$.

解:由 $r(A+E)=2$ 及方程组 $(A+2E)x=0$ 存在非零解可知

$$|A+E|=0 \qquad |2A+E|=0$$

则 A 有特征值 $-1,-2$. 又由 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$ 可得

$$|AA^*|=|AA^{\mathrm T}|=|A|^2,\ |AA^*|=|A|^3\Rightarrow|A|=0\text{ 或 }|A|=1$$

因为 A 非零,所以 A 中存在非零元素,不妨设 $a_{11}\neq0$,于是

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq0$$

所以有 $|A|=1$,故

$$1=|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Rightarrow\lambda_3=\frac{1}{2}\quad(\text{因为 }\lambda_1=-1,\lambda_2=-2)$$

所以

$$|A-E|=(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)(\lambda_3-1)=-2\times(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$$

第15章 矩 阵

●重要定理、公式和结论

15.1 矩阵的运算性质

(1) 矩阵的相等：相等的矩阵必须是同阶矩阵，即具有相同的行数和列数，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

(2) 矩阵的和与差：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$，即两个同阶矩阵相加(减)，为其所有对应元素相加(减).

(3) 数乘矩阵：$k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$. 矩阵的加法和数乘运算内满足下列运算规律：

① 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

② 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$，$(kl)\boldsymbol{A}=(kl)\boldsymbol{A}$.

③ 分配律 $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

以上 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 阶矩阵，k,l 为数.

(4) 矩阵的乘法：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的乘积为 $\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}=\boldsymbol{C}_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$. 矩阵乘法满足下列运算规律：

结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$.

数与乘积的结合律 $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})$.

注：① $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；② $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(5) 方阵的幂：对方阵 $\boldsymbol{A}$，定义 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}$($k$ 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘)为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂. 特别地，若存在整数 m，使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵. 方阵的幂满足下列运算规律：

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{A}^{k+m}\quad(\boldsymbol{A}^k)^m=\boldsymbol{A}^{km}\quad(k,m\text{ 为正整数})$$

15.2 重要结论

1. 三种运算

取转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、取逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$、取伴随 $\boldsymbol{A}^*$ 三者之间的关系如下：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\pm\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(2) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$，$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}\pm\boldsymbol{B}^{-1}$；

(3) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$，$(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$，$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^*\neq\boldsymbol{A}^*\pm\boldsymbol{B}^*$；

(4) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

2. 有关 A^{-1} 的结论

(1) $|A|\neq 0$;

(2) $r(A)=n$;

(3) A 的行(列)向量组线性无关;

(4) $Ax=0$ 只有零解;

(5) A 无零特征值.

3. 有关 A^* 的结论

(1) $AA^*=A^*A=|A|E$;

(2) 若 A 可逆,则 $A^*=|A|A^{-1}$;

(3) $|A^*|=|A|^{n-1},(A^*)^*=|A|^{n-2}A,(kA^*)=k^{n-1}A^*$;

(4) $r(A^*)=\begin{cases}n,r(A)=n\\1,r(A)=n-1;\\0,r(A)<n-1\end{cases}$

(5) $$\begin{pmatrix}A & O\\O & B\end{pmatrix}^*=|AB|\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\O & B^{-1}\end{pmatrix}=|A||B|\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\O & B^{-1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}|B||A|A^{-1} & O\\O & |A||B|B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|B|A^* & O\\O & |A|B^*\end{pmatrix}.$$

● 核心题型及思路启迪

15.3 逆矩阵

题型 142　有关逆矩阵的计算问题

思路启迪:(1) 若 A 为数字型,求 A^{-1},则一般用以下方法:

① $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$(当 $n\geqslant 3$,A^* 求解较麻烦,不适合用这种方法),当 A 为二阶时,$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$,主对角换位,次对角线换符号.

② 用行初等变换 $(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行}}(E\vdots A)$,适用于 $n\geqslant 3$ 的情形,特别是 $n=3$.

③ 用分块矩阵求逆($n\geqslant 4$ 时).

(ⅰ) $\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & O\\O & B^{-1}\end{bmatrix}$;

(ii) $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$;

(iii) $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$;

(iv) $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$.

(2) 若 A 为抽象矩阵，求 A^{-1}，则一般用定义；若 A 满足 $f(A)=0$，凑出 $AB=E$ 的形式，则 $A=B^{-1}$.

例1 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，求 $(A-2E)^{-1}$.

解：$A-2E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，用初等变换法：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(3)+(-1)\times(1)]{(2)+(-2)\times(1)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)+(2)\times 2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(1)+(3)\times(-1)+(2)\times(-2)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

故
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

注：$k\boldsymbol{A}$ 为 k 乘以 $\boldsymbol{A}$ 中的每个元素，即 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})$.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解：用分块矩阵法. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_1^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1^{-1}\end{pmatrix}$.

又因为 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ （伴随矩阵法）

$\boldsymbol{B}_1^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ （伴随矩阵法）

所以
$$-\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_1^{-1}=-\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

故
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2 & 4\\ -1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

例 3 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，求 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{-1}$.

解：首先设法分解出因子 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$.

由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$，即有 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}$，即
$$(-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$$

故 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{-1}=-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$.

注：如果题设条件为矩阵等式，讨论某矩阵的可逆性、求逆矩阵问题时，一般都是将已知等式化为“□ · □$=\boldsymbol{E}$”的形式进行分析，记住“求谁就分解出谁”，即“□”中之一必须为所求矩阵.

例 4 已知 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 是 n 维列向量，满足 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=2$，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$.

分析：设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$，则

$$X^TY=(x_1 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=2$$，为一数值.

$$XY^T=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}(y_1 \quad \cdots \quad y_n)=\begin{pmatrix}x_1y_1 & \cdots & x_1y_n\\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_n & \cdots & x_ny_n\end{pmatrix}$$，为一矩阵.

解：令 $XY^T=B$，于是 $A=E+XY^T=E+B$. 又 $B^2=XY^T\cdot XY^T=X(Y^TX)Y^T=2B$，而 $A-E=B$，从而 $(A-E)^2=2(A-E)$，即 $A^2-4A+3E=O$.

因为 $A^2-4A-5E=-8E$，可化为 $(A+E)(A-5E)=-8E$，也可为

$$(A+E)\left(-\frac{1}{8}\right)(A-5E)=E$$

故

$$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{8}(A-5E)$$

题型 143 矩阵可逆的证明

思路启迪：(1) 对于矩阵 A 已给出具体元素的形式，一般验证 $|A|$ 是否等于 0. 若 $|A|\neq 0$，则 A 可逆；否则，不可逆.

(2) 对于矩阵 A 为抽象的形式，一般寻找一个与 A 同阶的方阵 B，若 $AB=kE(k\neq 0)$，即可证明 A 可逆.

(3) A 可逆 $\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解.

例 5 已知 A 为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位阵，且 $(A-E)^2=3(A+E)^2$，则① A 可逆；② $A+E$ 可逆；③ $A+2E$ 可逆；④ $A+3E$ 可逆，以上结论中正确的有（ ）.

(A)1 个 (B)2 个 (C)3 个 (D)4 个

分析：利用矩阵可逆的定义或性质即可.

解：由 $(A-E)^2=3(A+E)^2$ 可得

$$A^2-2A+E=3(A^2+2A+E)\Rightarrow A^2+4A+E=O$$

于是

$A(A+4E)=-E$，则 A 可逆；

$A^2+4A+3E=2E\Rightarrow(A+E)(A+3E)=2E$，则 $A+E,A+3E$ 可逆；

$A^2+4A+4E=3E\Rightarrow(A+2E)^2=3E$，则 $A+2E$ 可逆.

故本题选(D).

例 6 设 A,B 都是 n 阶矩阵，已知 $A-E,B$ 都可逆，且 $(A-E)^{-1}=B^*-E$，证明：A 可逆，并求它的逆矩阵.

分析：矩阵乘法不满足交换律，与矩阵相交换有联系的主要是逆矩阵的定义式. 因此，在计算或证明中，若涉及矩阵相交换的情形，则应尽量从逆矩阵的定义着手分析.

证：由 $(A-E)^{-1}=B^*-E$ 可得 $(A-E)(B^*-E)=E$，即 $AB^*-A-B^*=O$.

所以有 $A(B^*-E)=B^*$. 因为 B 可逆，所以 B^* 可逆，所以 $A(B^*-E)(B^*)^{-1}=E$，故 A

可逆，且 $A^{-1}=(B^*-E)(B^*)^{-1}=E-(B^*)^{-1}=E-\frac{B}{|B|}$.

15.4 矩阵的运算

题型 144 有关矩阵运算的命题

思路启迪：利用矩阵的运算性质. 若求 A^n，则一般利用以下方法：

(1) 求出 $A^2,A^3,\cdots$，找出规律，用数学归纳法证.

(2) 若 $r(A)=1$，则 $A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)=\alpha\beta^T$，且

$$\beta\alpha^T=(b_1,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\mu$$

$$\Rightarrow A^k=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)\beta^T=\mu^{k-1}A$$

(3) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^{-1}$.

例 7 填空题.

(1) 设 $A=\frac{1}{2}(B+E)$，则当且仅当 $B^2=$________时，$A^2=A$.

(2) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$的充分必要条件是________.

解：(1) $A^2=A\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}(B+E)\right]^2=\frac{1}{2}(B+E)\Leftrightarrow B^2=E$，故应填 E.

(2) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)\Leftrightarrow O=AB-BA\Leftrightarrow AB=BA$，故应填 $AB=BA$.

例 8 单项选择题.

(1) 设 A,B 为 n 阶对称矩阵，则下面四个结论中不正确的是(　　).

(A) $A+B$ 也是对称矩阵　　(B) AB 也是对称矩阵

(C) A^m+B^m(m 为正整数)也是对称矩阵　　(D) BA^T+AB^T 也是对称矩阵

(2) 设 A,B,C 为 n 阶方阵，若 $AB=BA,AC=CA$，则 ABC 等于(　　).

(A) ACB　(B) CBA　(C) BCA　(D) CAB

解：(1) 利用枚举法，逐项计算转置，看是否为对称矩阵即可. 因为$(AB)^T=B^TA^T=BA$，但一般 $BA\neq AB$，故(B)为应选答案.

(2) $ABC=(BA)C=B(AC)=BCA$，故(C)为正确答案.

例 9 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A^n.

解：方法1 用数学归纳法.

因为 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

一般地，设 $A^{n-1}=\begin{pmatrix}1&0&n-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

$$A^n=A^{n-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&n-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由数学归纳法知 $A^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

方法2 利用对角阵和主对角线为零的上三角阵幂的特点进行计算.

令 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=E+B$，其中 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$$A^n=(E+B)^n=E^n+n\cdot E^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2!}E^{n-2}B^2+\cdots+nEB^{n-1}+B^n$$

因为 $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $B^k=O(k\geqslant 2)$，所以

$$A^n=(E+B)^n=E^n+n\cdot E^{n-1}B=E+nB=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例10 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$，求矩阵 A，A^2 和 A^{100}.

分析：计算方阵的高次幂是一种常见的题型，除用数学归纳法外，还应注意结合方阵本身的特征进行讨论. 本题的关键是注意到 A 的秩为1，则 A 可表示为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(1\quad -1\quad 2)=PQ$$

PQ 为矩阵，而 QP 为数值，利用矩阵乘法的结合律 $A^2=PQ\cdot PQ=P(QP)Q=6PQ$ 达到简化的目的.

解：$A=PQ=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(1\quad -1\quad 2)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$，$QP=(1\quad -1\quad 2)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=6$，

$A^2=PQ\cdot PQ=P(QP)Q=6PQ=6A$，$A^3=A^2\cdot A=6A\cdot A=6A^2=6^2A$.

一般地，设 $A^{k-1}=6^{k-2}A$，则 $A^k=A^{k-1}\cdot A=6^{k-2}A\cdot A=6^{k-1}A$.

根据数学归纳法，有 $A^k=6^{k-1}A$，于是

$$A^{100}=6^{99}A=6^{99}A=6^{99}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

例 11 已知 $AP=PB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A 及 A^5.

分析：观察此题，B 是对角阵，B^k 可以很方便地求出来.

解：先求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$，因为 $AP=PB$，所以

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$A^5=(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})$$

$$=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

题型 145 求矩阵的行列式

思路启迪：本题型通过给出与行列式相关联的方阵、伴随阵、逆矩阵、向量在指定运算下所构成的行列式的计算，达到考核这些概念的运算性质、行列式的性质等目的，因此，这些概念及性质务必非常熟悉.

例 12 已知 $A^2B-A-B=E$，$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求 $|B|$.

分析：本题求矩阵的行列式，先对已知矩阵方程进行变换，然后再求解.

解：

$$A^2B-A-B=E\Rightarrow(A^2-E)B=A+E\Rightarrow(A+E)(A-E)B=(A+E)$$

$$\Rightarrow|A+E|\,|A-E|\,|B|=|A+E|$$

而 $|A+E|=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{vmatrix}=18\neq0$，$|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=2\neq0$，所以

$$|B|=\frac{1}{|A-E|}=\frac{1}{2}$$

例 13 设 A 为 3 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，试求 $|(3A)^{-1}-2A^*|$.

解：因为$(3\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$，且$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}=2$，所以

$$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|\boldsymbol{A}^{-1}|=-\frac{16}{27}$$

例 14 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$（$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置），$|\boldsymbol{A}|<0$，试求：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

分析：为了计算$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$，需要利用已知条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，可以这样考虑：

(1) 直接把$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$中的 $\boldsymbol{E}$ 用$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 代替；

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 右乘以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，然后取行列式.

解：方法 1 因为

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$$

所以$(1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$. 又因为$|\boldsymbol{A}|<0$，所以 $1-|\boldsymbol{A}|>0$，故$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

方法 2 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 右乘以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，并取行列式得

$$|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$$

即$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$，从而有$(1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，又因为$|\boldsymbol{A}|<0$，所以 $1-|\boldsymbol{A}|>0$，故$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

例 15 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

则$|\boldsymbol{A}|$中 $A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}=$________.

解：

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{k1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{k2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{kn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ a_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}=|\boldsymbol{A}|\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \frac{1}{a_n} \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

$$=|\boldsymbol{A}|\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}=|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{a_k}=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\cdot\frac{1}{a_k}$$

$$=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{k-1}a_{k+1}\cdots a_n$$

题型 146 与伴随矩阵相关的命题

思路启迪：一般利用 A^* 的性质和结论进行讨论. 特别是 $AA^*=A^*A=|A|E$.

例 16 设 A,B 都是 n 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，已知 $|A|=2$，$|B|=-3$，求 $|2A^*B^{-1}|$.

解：$|2A^*B^{-1}|=2^n|A^*||B^{-1}|=2^n|A|^{n-1}\dfrac{1}{|B|}=2^n2^{n-1}\dfrac{1}{(-3)}=-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$.

例 17 已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

解：因为 $A^*=|A|A^{-1}$，所以 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A=|A^{-1}|A$.

求 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵，用初等行变换法，得

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

所以 $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. 又因为 $|A^{-1}|=2$，所以

$$(A^*)^{-1}=2\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

例 18 设 A 为 n 阶可逆矩阵，且 $A^2=|A|E$. 证明：A 的伴随阵 $A^*=A$.

证：因为 A 为 n 阶可逆矩阵，所以 $A^*=|A|A^{-1}=|A|EA^{-1}=A^2A^{-1}=A$.

例 19 设 $A=(a_{ij})$，为 n 阶方阵，满足 $AA^T=E$，$|A|=1$. 证明：$a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，其中 A_{ij} 为 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

证：由题设可知 $AA^T=E$，又根据公式 $AA^*=A^*A=|A|E$ 可知 $AA^*=E$，所以 $AA^*=AA^T$，两边同时左乘以 A^{-1}，得 $A^*=A^T$，即 $(A_{ji})=(a_{ij})^T=(a_{ji})$，亦即 $a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$.

15.5 初等矩阵

题型 147 有关初等变换和初等矩阵的命题

思路启迪：(1) 利用初等矩阵的定义、性质及与初等变换的关系. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行(列)变换，相当于左(右)乘以同类型的初等矩阵.

(2) 三种初等行(列)变换：

① 交换两行(列)；

② 某行(列)乘以某常数 k 倍；

③ 某行(列)的 k 倍加到另一行(列).

(3) 单位阵 $\boldsymbol{E}$ 通过以上三种初等变换所得的矩阵，分别记为：

$$E_{ij}, E_i(k)(k\neq 0), E_{ij}(k)\ (\text{或 } E(i,j+i(k)))$$

性质如下：

① $E_{ij}^{\mathrm{T}}=E_{ij}$；$E_i^{\mathrm{T}}(k)=E_i(k)$；$E_{ij}^{\mathrm{T}}(k)=E_{ij}(k)$.

② $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$；$E_i^{-1}(k)=E_i\left(\dfrac{1}{k}\right)$；$E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$.

③ $E_{ij}^{*}=|E_{ij}|E_{ij}^{-1}=-E_{ij}$；$E_i^{*}(k)=|E_i(k)|E_i^{-1}(k)=kE_i(\dfrac{1}{k})$；

$E_{ij}^{*}(k)=|E_{ij}(k)|E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$.

例 20 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行乘以 (-3) 加到第 3 行得到 $\boldsymbol{A}_1$，将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列乘以 (-3) 得到 $\boldsymbol{B}_1$，若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&5&7\\4&8&6\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解：由题意可得

$$\boldsymbol{PABQ}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1\qquad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

又因为 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{A}_1\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{BQ}=\boldsymbol{B}_1\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}^{-1}$，所以

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&1\\2&5&7\\4&8&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&5&7\\4&17&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&1\\-\frac{2}{3}&5&7\\-\frac{4}{3}&17&9\end{pmatrix}$$

注：要注意到 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是初等矩阵.

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&1\\2&5&7\\4&8&6\end{pmatrix}$是对$\begin{pmatrix}0&3&1\\2&5&7\\4&8&6\end{pmatrix}$施行将第 1 行乘以 3 加到第 3 行的初等变换.

$\begin{pmatrix}0&3&1\\2&5&7\\4&17&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是对$\begin{pmatrix}0&3&1\\2&5&7\\4&17&9\end{pmatrix}$施行对第 1 列乘以$\left(-\frac{1}{3}\right)$的初等变换.

例 21 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

分析：根据矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系，对题中给出的行(列)变换通过左(右)乘以一相应的初等矩阵来实现.

解：由题意 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{AQ}$$

从而 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，故本题选(D).

例 22 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$

(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

分析：本题考查初等变换与初等矩阵之间的关系以及初等矩阵的逆矩阵. 本题只要观察出 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的变换关系，再由初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2$ 的关系就可得到正确选项.

解：因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 交换第 2,3 列和第 1,4 列所得(此处无先后顺序)，故有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\quad 或\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$$

对式两端求逆，并考虑到 $\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2$，可得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\quad 或\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}$$

可见(C)项正确，故本题选(C).

第16章　向　量

●重要定理、公式和结论

16.1　重要结论

1. 有关线性相关性的结论

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维列向量，

① 若 $m=n$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关(相关)$\Leftrightarrow|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)|=0(\neq 0)$；

② 若 $m>n$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；

③ 若 $m<n$(重点)，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\to$阶梯形(初等变换)，可得 $r(\boldsymbol{A})=r$.

若 $r=m$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；若 $r<m$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则每个向量对应添加分量后，仍线性无关；若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则每个向量对应去掉某些分量后，仍线性相关.

(3) 向量组整体无关，则部分组线性无关；若部分组线性相关，则整体相关.

(4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，且 $s>t$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $s\leqslant t$.

2. 有关线性表示的结论

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关$\Leftrightarrow$至少有一个向量可由其余向量线性表示；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表示.

注：①$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$；

② 非齐次方程组有解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

3. 有关秩的结论

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$.

(2) $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min(m,n)$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$.

(3) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(k\boldsymbol{A})$，$k\neq 0$.

(4) $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

(5) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

(6) $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

① $\boldsymbol{A}$ 可逆或 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n$，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$；

② $\boldsymbol{B}$ 可逆或 $r(\boldsymbol{B}_{n\times s})=n$，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.

(7) $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n\Leftrightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(8) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

●核心题型及思路启迪

16.2 向量题型

题型 148 讨论向量组的线性相关性

思路启迪：判定向量组的线性相关性可用如下方法：

(1) 利用定义.

对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$：

① 若存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使上式成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；

② 若当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s$ 上式才成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明线性无关时，还可用反证法处理.

(2) 利用矩阵的秩或行列式.

设有 m 个 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，

① 若 $m=n$，则当 $|\mathbf{A}|\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；否则线性相关.

② 若 $m<n$，一般用初等变换求矩阵的秩.

则当 $r(\mathbf{A})=m$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；当 $r(\mathbf{A})<m$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(3) 判定由线性无关向量组Ⅰ线性表示的向量组Ⅱ的线性相关性问题时，可利用如下方法：

设Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{2m}\boldsymbol{\alpha}_m\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s=a_{s1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{s2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{sm}\boldsymbol{\alpha}_m\end{cases}$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{s1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{s2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1m}&a_{2m}&\cdots&a_{sm}\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m)\mathbf{A}.$$

则当 $r(\mathbf{A})=s$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关；$r(\mathbf{A})<s$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.

注：① 单个非零向量线性无关.

② 含有零向量的向量组一定线性相关.

③ 基本单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$ 一定线性无关.

④ 两个向量线性相关的充要条件是对应元素成比例.

⑤ 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则每个向量对应添加分量后，仍线性无关；若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则每个向量对应去掉某些分量后，仍线性相关.

⑥ 向量组整体无关，则部分组线性无关；若部分组线性相关，则整体相关.

例 1 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c),\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$ 线性无关，则 a,b,c 必满足________.

分析：因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为行向量组成的矩阵的行列式不为零，即可求得 a,b,c 所满足的关系式.

解：设以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为行向量组成的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix}=2abc$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $abc\neq 0$.

例 2 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-4,-8,k)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，求 k.

解：向量个数小于维数，故用矩阵的秩讨论. 利用初等变换法化阶梯形.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -8 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & k+1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见，当 $k=2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2<3$，这时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 才是线性相关的，所以 $k=2$.

例 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量，若对某一正整数 k，有 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}\neq 0$，但 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=0$（规定 $\boldsymbol{A}^0$ 为 n 阶单位矩阵），试证明：向量组 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 线性无关.

证：设有 k 个常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{x}+\lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}=0 \tag{1}$$

式(1)的两边分别左乘以 $\boldsymbol{A}^{k-1}$ 可得

$$\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}+\lambda_2\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{x}=0.$$

由于 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{x}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{x}=0$，所以 $\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}=0$，而 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}\neq 0$，所以 $\lambda_1=0$. 代入式(1)得

$$\lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}=0$$

式(2)的两边分别左乘以 $\boldsymbol{A}^{k-2}$ 可得 $\lambda_2\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}+\lambda_3\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{2k-3}\boldsymbol{x}=0$.

由于 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{x}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2k-3}\boldsymbol{x}=0$，所以 $\lambda_2\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}=0$，而 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}\neq 0$，所以 $\lambda_2=0$. 代入式(2)得

$$\lambda_3 \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x} = 0.$$

依此类推得 $\lambda_3 = \cdots = \lambda_k = 0$.

由上可知，当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ 时，式(1)才成立，故向量组 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 线性无关.

例 4　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，试证明：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

证：利用反证法.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可知 $\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，即存在常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得下式成立

$$\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \tag{1}$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则存在常数 $l_1, l_2, \cdots, l_m$，使得下式成立

$$\boldsymbol{\beta}_1 = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m \tag{2}$$

于是由式(1)、(2)可得

$$\boldsymbol{\beta}_2 = (k_1 - l_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 - l_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_m - l_m)\boldsymbol{\alpha}_m$$

即 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，这与题设矛盾，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

例 5　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s$，其中 $\lambda_i \neq 0$，试证明：$\boldsymbol{\beta}$ 替换 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 后的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证：因为 $\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s = (\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix}$，所以

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_{i-1} \quad \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\alpha}_{i+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s) = (\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{i+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{i+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \lambda_i \neq 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

例 6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 为 $m+1(m>1)$ 个列向量，且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$. 试证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证：
$$(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}\tag{1}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{m-1}(m-1)\neq0$，所以，当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关时，$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，充分性得证.

下面证明必要性.

由式(1)知 $(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_m)=(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{A}^{-1}$，而 $|\boldsymbol{A}^{-1}|\neq0$，所以当 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

综上所述，向量组 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

例 7 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r;r<n)$ 是 n 维实向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 已知 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\vdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$
的非零解向量，试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

分析：对于抽象的向量组，一般根据向量组线性相关性定义判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

解：设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k$，使得
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=0\tag{1}$$

式(1)两边都左乘以 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，得
$$k_1(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r)+k(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=0\tag{2}$$

由于 $\boldsymbol{\beta}$ 是所给线性方程组的解向量，所以有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0(i=1,2,\cdots,r)$，代入式(2)得 $k(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=0$，于是由 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq0$ 得 $k=0$，因此，式(1)成为
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=0$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，得 $k_i=0(i=1,2,\cdots,r)$.

由上可知，式(1)仅在 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k$ 全为零时成立，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

题型 149 求向量组的极大线性无关组和秩

思路启迪： 求向量组的极大线性无关组一般用初等行变换法，首先将向量组的各向量作为矩阵的列，然后对上述矩阵作初等行变换，当矩阵变为阶梯形矩阵后，若阶梯形矩阵有 r 个非零行向量，则它的 r 个线性无关的列向量所对应的原向量就是所给向量组的一个极大线性无关组，此时向量组的秩为 r. 具体做法为：在每一阶梯取一列，则对应的原向量所构成的向量组即为极大线性无关组.

例 8 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(7,0,14,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(5,1,6,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,-1,4,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量表示成这个极大线性无关组的线性组合.

解： $$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4\quad\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\0&-21&-7&-14&-7\\0&0&-4&-4&0\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\0&3&1&2&1\\0&0&-4&-4&0\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\0&3&1&2&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&3&0&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3\quad\boldsymbol{\beta}_4\quad\boldsymbol{\beta}_5).$$

由上可知 $\boldsymbol{B}$ 为阶梯形矩阵，其中 $\boldsymbol{\beta}_1$ 为一阶梯，$\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_5$ 为一阶梯，$\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为一阶梯，为了计算简便，取极大线性无关组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_5$，则由 $\boldsymbol{B}$ 可知

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_1+3\boldsymbol{\beta}_5,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_5.$$

故所求的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_5$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_5$.

例 9 设四维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

分析： 因为向量组中的向量个数和向量维数相同，所以，用以向量为列向量的矩阵的行列式为零来确定参数 a；然后根据 a 的值确定极大线性无关组.

解： 设以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(10+a)a^3$$

于是当$|\boldsymbol{A}|=0$，即$a=0$或$a=-10$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

当$a=0$时，显然$\boldsymbol{\alpha}_1$是一个极大线性无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$；

当$a=-10$时，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}\quad(\text{列依次为 }\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$$

由于此时$\boldsymbol{A}$有3阶非零行列式$\begin{vmatrix} -9 & 2 & 3 \\ 1 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}=-400\neq0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为极大线性无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

题型 150　有关向量组或矩阵的秩的计算与证明

思路启迪：(1) 若矩阵或向量组为数值型，利用初等变换法(可以行列初等变换并用)化$\boldsymbol{A}$或$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$为阶梯形，则$r=$阶梯个数.

(2) 若矩阵为抽象矩阵，则利用秩的相关结论.

(3) 利用定义，对于向量组，其极大线性无关组中向量的个数即为向量组的秩；对于矩阵$\boldsymbol{A}$，若存在r阶子式不为零，但任意$r+1$阶子式全为0，则定义$r(\boldsymbol{A})=r$.

例 10　设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$且$r(\boldsymbol{A})=3$，则$k=$______.

分析：由$r(\boldsymbol{A})=3$可得$|\boldsymbol{A}|=0$，从而可求得k.

解：因为$r(\boldsymbol{A})=3$，所以$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3=0$，得$k=1,-3$.

当$k=1$时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，它的秩为1，不合题意.

当$k=-3$时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，由于$\boldsymbol{A}$有不为零的三阶子式

$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$，所以 $r(\boldsymbol{A})=3$，故 $k=-3$.

注：解题时，对使 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的每个 k，还需检验它们是否能使 $r(\boldsymbol{A})=3$.

例 11 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 4 阶方阵，且 $r(\boldsymbol{A})=4$，$r(\boldsymbol{B})=3$，则 $r(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*)=$________.

解：因为 $r(\boldsymbol{A})=4$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，而 $r(\boldsymbol{B})=3=4-1$，则 $r(\boldsymbol{B}^*)=1$，故 $r(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*)=r(\boldsymbol{B}^*)=1$.

例 12 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & b \\ 2 & a & c \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$，则 $r(\boldsymbol{B})=$________.

解：由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$ 可得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，于是 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$.

而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & b \\ 2 & a & c-1 \end{pmatrix}$，$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-6\neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant 2$.

故可推得 $r(\boldsymbol{B})\leqslant 1$.

又由题设知 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，所以 $r(\boldsymbol{B})=1$.

例 13 已知向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；Ⅱ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；Ⅲ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$. 如果各向量组的秩分别为 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)$=3$，r(Ⅲ)$=4$，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

证：要证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4，只要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关即可.

由 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)$=3$ 可知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

由 r(Ⅲ)$=4$ 可知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关.

利用反证法证明.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，又 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则可推知 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性相关，这与条件是矛盾的，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

例 14 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，$\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵，证明：$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=n$.

证：因为 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$，所以 $\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{E}$，所以 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{O}$，所以

$$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})\leqslant n \tag{1}$$

又 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=2\boldsymbol{E}$，所以

$$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})\geqslant r(2\boldsymbol{E})=n \tag{2}$$

所以由式(1)(2)可知 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=n$.

题型 151 有关向量的线性表示的问题

思路启迪：(1) $\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且它们均是抽象型，则一般用线性表示的两个结论：

① 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表示.

② $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$.

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且它们均是数值型，则一般转化为解线性方程组，方法如下：

令 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s$，看能否找到 $x_1,\cdots,x_s$ 使左式成立.

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，通过判断 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解、无解和无穷解来求解.

(3) $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且它们均是数值型，则一般方法如下：

$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}_i,i=1,\cdots,t$，转化为方程组的求解.

或者，若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 与 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s|\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$ 相等，则可线性表出.

若两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可相互线性表出，则两个向量组等价.

例 15 单项选择题.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关；$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示　　(B) $\boldsymbol{\beta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示　　(D) $\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

(2) 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，记向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$，则

(A) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由Ⅰ线性表示，也不能由Ⅱ线性表示

(B) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由Ⅰ线性表示，但可由Ⅱ线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由Ⅰ线性表示，也可由Ⅱ线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由Ⅰ线性表示，但不能由Ⅱ线性表示

(3) 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价

(4) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

(5) 设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则

(A) 当 $r<s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关　　(B) 当 $r>s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关

(C) 当 $r<s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关　　(D) 当 $r>s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关

解：(1) 由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，于是由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关得 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示. 故本题选(C).

(2) 由于 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，所以存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得下式成立

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

再由 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示知，式中的 $k_m\neq0$. 从而

$$\boldsymbol{\alpha}_m=\frac{1}{k_m}\boldsymbol{\beta}-\frac{k_1}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由Ⅱ线性表示.

此外，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由Ⅰ线性表示. 事实上，如果 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由Ⅰ线性表示，则因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，可推得 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，这是矛盾的. 故本题选(B).

(3) 因为同型矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，而

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\text{ 线性无关}\Leftrightarrow\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=m$$

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\text{ 线性无关}\Leftrightarrow\text{秩}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=m\Leftrightarrow r(\boldsymbol{B})=m$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，即矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价. 故本题选(D).

而选项(A)(C)仅是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分而非必要条件.

如令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，显然向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均不能互相线性表示.

对于(B)，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则有

$$\text{秩}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\leqslant\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$$

因此，不能推得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的线性相关性.

(4) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2)$，因向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故必存在常数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

分别对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 实施相应的初等列变换，得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)\to(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)$$

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2)\to(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_2)$$

因为矩阵的初等变换不改变其行(列)向量组的秩，从而也不改变其行(列)向量组的线性相关性，可见向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关性相同；向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关性相同. 又由题设条件可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 不论 k 为何值均线性无关；而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关与否依赖于 k 的取值($k=0$ 时，线性相关；$k\neq0$ 时，线性无关)，从而本题选(A).

(5) 因为向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，故

$$r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})\leqslant s$$

所以当 $r>s$ 时，必有 $r(\text{Ⅰ})<r$，即向量组Ⅰ的秩小于其所含向量的个数，此时向量组Ⅰ必线性相关，故本题选(D).

例16 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,b,c)^{\mathrm{T}}$. 试问：当 a,b,c 满足什么条件时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，但表示不唯一？并求出一般表达式.

分析：记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则只要讨论 a,b,c 满足什么条件时，线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解、无解以及有无穷多解.

解：记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$，则 x_1,x_2,x_3 的表达式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$$

写成方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

(1) 容易算出 $|\boldsymbol{A}|=-a-4$，所以当 $a\neq-4$ 时，由 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 知方程组有唯一解，从而 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一.

(2) 当 $a=-4$ 时，对方程组的增广矩阵施行初等行变换.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 2 & 1 & 0 & -1-b \\ 0 & 0 & 0 & 1-3b+c \end{array}\right)$$

由此可知，如果 $1-3b+c\neq0$，则由 $2=r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$ 知方程组无解，所以当 $a=-4$，$3b-c\neq1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(3) 当 $a=-4$ 且 $3b-c=1$ 时，由 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$ 知方程组有无穷多解，从而 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，但表示不唯一. 求出方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1-b \\ 1+2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ -2t-1-b \\ 1+2b \end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}=t\boldsymbol{\alpha}_1-(2t+b+1)\boldsymbol{\alpha}_2+(2b+1)\boldsymbol{\alpha}_3$$

其中 t 为任意常数.

例 17 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是三维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，证明：存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\boldsymbol{\xi}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出.

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ 时，求所有既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出的向量.

证：(1) 4 个三维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 必线性相关，故知存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=0$，即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$. 其中 k_1,k_2 不全为零(否则，由 $-\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$，这和 $k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2$ 相矛盾).

令 $\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2\neq0$，则 ξ 即为所求.

(2) 由(1)知，$\xi=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$. 得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=0$.

解方程组可得通解为 $(k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2)=k(1,0,-5,-3)^{\mathrm{T}}$，故所求向量为

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=k\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

其中 k 为任意常数.

例 18　设有向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$ 和向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(2,1,a+4)^{\mathrm{T}}$. 试问：当 a 为何值时，向量组Ⅰ与Ⅱ等价？当 a 为何值时，向量组Ⅰ与Ⅱ不等价？

分析：由向量组等价定义可知，线性方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_i\quad 与\quad(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_i\qquad(i=1,2,3)$$

都有解时，Ⅰ与Ⅱ等价；当上述的某个方程组无解时，Ⅰ与Ⅱ不等价.

解：记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{vmatrix}=a+1\qquad|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}=6$$

于是方程组 $(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 都有唯一解，由此表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，即Ⅰ可由Ⅱ线性表示.

(1) 当 $a\neq-1$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$ 都有唯一解，由此表明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即Ⅱ可由Ⅰ线性表示. 故根据定义，Ⅰ与Ⅱ等价.

(2) 当 $a=-1$ 时，由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&0&-2\end{array}\right)$$

则 $2=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta}_1)=3$，所以方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_1$ 无解，即Ⅱ不能由Ⅰ线性表示，即当 $a=-1$ 时，向量组Ⅰ与Ⅱ不等价.

16.3* 向量空间题型

题型 152 求向量空间的基与维数

思路启迪：向量空间的基实际上就是向量空间中所有向量集合的一个极大线性无关组，因此，可用通常的方法（比如初等变换法）求出一个极大线性无关组，也就得到向量空间的一组基，极大线性无关组所含向量的个数就是向量空间的维数.

特别地，求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 解空间的基，就是其基础解系，基础解系所含解向量的个数即为解空间的维数.

例 19 求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间的一组基及其维数，并在此基础上进一步求其一组标准正交基.

解：现用初等变换求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&1&4&1\\1&1&3&2\\0&2&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&-1&-2&-1\\0&0&0&1\\0&2&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&2&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为一极大线性无关组，因此由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 所生成的向量空间为

$$\mathbf{V}=\{x=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4\mid k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}\}$$

其维数为 3.

下面进一步求 $\mathbf{V}$ 的一组标准正交基.

(1) 先把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},2\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_4-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\left(-\frac{1}{26},-\frac{6}{13},-\frac{1}{26},\frac{10}{13}\right)^{\mathrm{T}}$$

(2) 再把 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{13}},-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{13}},\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{13}},\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{13}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{546}},-\frac{12}{\sqrt{546}},-\frac{1}{\sqrt{546}},\frac{20}{\sqrt{546}}\right)^{\mathrm{T}}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 为向量空间 $\mathbf{V}$ 的一组标准正交基.

例 20 求齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 解空间的一组基及其维数.

解：齐次线性方程组可改写为 $x_1=-x_2-\cdots-x_n$，显然，可取 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由未知量，得

其基础解系为

$$\xi_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\xi_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\xi_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T$$

则基础解系为方程组解空间的一组基，其维数为 $n-1$.

题型 153　求过渡矩阵与向量的坐标

思路启迪：对于向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的两组基：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，

若存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{P}$ 称为基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵. 两个基之间的过渡矩阵是可逆矩阵.

对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)x=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)y=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}y$，则 $x=\boldsymbol{P}y$ 或 $y=\boldsymbol{P}^{-1}x$ 称为坐标变换公式.

例 21　设有 $\boldsymbol{R}^3$ 中的两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^T\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)^T\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,5,3)^T$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,0)^T\quad \boldsymbol{\beta}_2=(1,3,0)^T\quad \boldsymbol{\beta}_3=(0,0,2)^T$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；

(2) 求由基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

解：(1) 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$，有

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&5\\0&1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-5\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\6&9&-10\\-2&-3&4\end{pmatrix}$$

(2) 设由基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$，由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{Q}$，有

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&5\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&5\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&-5\\-2&2&5\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

例 22　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,-5)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的一组基，求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(6,2,-7)^T$ 在此基下的坐标.

解：设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，即 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则可得

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=6\\x_1+2x_2-x_3=2\\-3x_1-5x_2+x_3=-7\end{cases}$$

解方程组得 $x_1=1,x_2=1,x_3=1$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

或另解如下：

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\text{得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

题型 154　有关正交矩阵的命题

思路启迪：利用正交矩阵定义 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 即可.

例 23　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为正交矩阵.

证：因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&=\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\\&=\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\left(\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\right)^2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\left(\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\right)^2(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\qquad(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\text{ 是数值})\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

例 24　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为正交矩阵.

分析：只需验证 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 即可.

证：因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}&=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{E})\\&=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\\&=\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}\\&=(\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为正交矩阵.

第 17 章　线性方程组

●重要定理、公式和结论

17.1　重要性质和定理

1. 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$

(1) 判定定理：$A_{m\times n}x=0$ 一定有解，且

当 $r(A)=r=n$ 时$\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解；

当 $r(A)=r<n$ 时$\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解.

注：$A_{n\times n}x=0$ 有非零解$\Leftrightarrow r(A)<n\Leftrightarrow |A|=0$.

(2) 性质：设 $x_1,\cdots,x_s$ 为 $Ax=0$ 的解，则 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_sx_s$($k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是常数)为 $Ax=0$ 的解.

注：$Ax=0$ 解向量集合对加法、数乘运算是封闭的，所以构成一个向量空间，称为解空间.

(3) 结构：

① 基础解系：$Ax=0$ 所有解向量的极大线性无关组为其基础解系，也是它的解空间的一个基，记为 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$，$r(A)=r$.

注：任意 $n-r(A)$个线性无关的解向量均可作为基础解系(因为极大线性无关组不唯一，所以基础解系不唯一，基不唯一). 基础解系须满足 3 个条件：每个均是解；线性无关；个数为$n-r(A)$.

② 通解：$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

2. 非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$

(1) 判定定理：$A_{m\times n}x=b$ 有解$\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})$(其中 $\bar{A}=(A|b)$)，且

$$r(A)=r(\bar{A})=r=n\Leftrightarrow A_{m\times n}x=b \text{ 有唯一解；}$$

$$r(A)=r(\bar{A})=r<n\Leftrightarrow A_{m\times n}x=b \text{ 有无穷多解.}$$

(2) 性质：① $Ax_1=b,Ax_2=b\Rightarrow A(x_1-x_2)=0$；

② $Ax_1=b,Ax_0=0\Rightarrow A(x_1+x_0)=b$.

注：$A_{m\times n}x=b$ 的解的线性组合不一定还是它的解.

设 $x_1,\cdots,x_s$ 为 $Ax=b$ 的解，则对于常数 $k_1,\cdots,k_s$，

① 若 $k_1+\cdots+k_s=1$，则 $k_1x_1+\cdots+k_sx_s$ 为 $Ax=b$ 的解；

② 若 $k_1+\cdots+k_s=0$，则 $k_1x_1+\cdots+k_sx_s$ 为 $Ax=0$ 的解.

特别：$\dfrac{x_1+x_2}{2}$为 $Ax=b$ 的解；$2x_2-(x_1+x_3)$为 $Ax=0$ 的解.

(3) 结构：通解为 $x=\eta^*+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，其中 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$为对应齐次方程组的基础解系，η^* 为方程组的一个特解.

●核心题型及思路启迪

17.2 有关线性方程组的题型

题型 155 有关线性方程组的基本概念题

思路启迪：应熟练掌握齐次线性方程组和非齐次线性方程组解的判定、性质和结构理论，并注意这两类方程组解的联系和差别.

例 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$（ ）.

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解　　(B) 当 $n>m$ 时必有非零解

(C) 当 $m>n$ 时仅有零解　　(D) 当 $m>n$ 时必有非零解

分析：根据齐次线性方程组有非零解（或仅有零解）的充分必要条件进行判定.

解：由题设可知，$\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶矩阵，则 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分必要条件为 $r(\boldsymbol{AB})=m$，又因 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant\min(m,n)$，所以当 $m>n$ 时，必有 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant\min(m,n)=n<m$，即此时 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故本题选(D).

例 2 齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$

的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$，若存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则（ ）.

(A) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

(C) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(D) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

分析：利用齐次线性方程组有非零解的充分必要条件求解.

解：由 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 及 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知所给的齐次线性方程组有非零解，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，即

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=0$$

解之得 $\lambda=1$，并且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$.

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，从而 $|\boldsymbol{B}|=0$.

故本题选(C).

注：本题利用矩阵的性质也可得到 λ 和 $|\boldsymbol{B}|$ 的值.

由题设知 $|\boldsymbol{A}|=0$，事实上，如果 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，这与 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 矛盾，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，即

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=0$$

解之得 $\lambda=1$，并且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$. 同理可推得 $|\boldsymbol{B}|=0$.

例 3 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，现在有 4 个命题：

① 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$；

② 若秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解；

③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$；

④ 若秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

以上命题正确的是(　　).

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②④　　(D) ③④

分析：由于线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 之间可以无任何关系，此时其系数矩阵的秩之间的任何关系都不会影响它们各自解的情况，所以②和④显然不正确，利用排除法，可立即得到正确选项为(B).

解：下面证明①和③正确.

对于①，由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解可知，方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 含于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 之中，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的有效方程的个数(即 $r(\boldsymbol{A})$)必不少于 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的有效方程的个数(即 $r(\boldsymbol{B})$)，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$.

对于③，由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则其解空间的维数相同，即 $n-r(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{B})$，从而 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

注：齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$(其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵)同解的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

例 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组 Ⅰ：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 Ⅱ：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，必有(　　).

(A) Ⅱ的解是Ⅰ的解，Ⅰ的解也是Ⅱ的解

(B) Ⅱ的解是Ⅰ的解，但Ⅰ的解不是Ⅱ的解

(C) Ⅰ的解不是Ⅱ的解，Ⅱ的解也不是Ⅰ的解

(D) Ⅰ的解是Ⅱ的解，但Ⅱ的解不是Ⅰ的解

分析：显然Ⅰ的解是Ⅱ的解，因此只须考虑(A)和(D)即可.

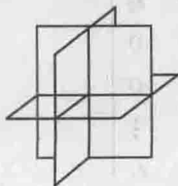
解：下面判断Ⅱ的解是否为Ⅰ的解.

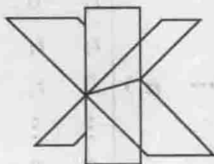
设 x_0 是Ⅱ的解，则 $x_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x_0=0$，即 $(\boldsymbol{A}x_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}x_0)=0$.

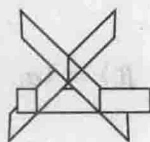
设 $\boldsymbol{A}x_0=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，则由上式得 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0$，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. 所以 $\boldsymbol{A}x_0=\boldsymbol{0}$，从而 x_0 也是Ⅰ的解. 故本题选(A).

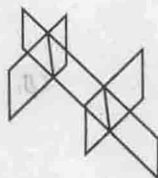
注：事实上，因为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$ 都有零解，可排除(B)，(C)和(D)，正确选项为(A).

例 5 设有三个不同的平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i(i=1,2,3)$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三个平面可能的位置关系为(　　).


(a)


(b)


(c)


(d)

分析：本题考查利用线性方程组的理论讨论空间几何问题. 由题设条件可知，此 3 个平面有无穷多个公共点，运用排除法可知，只有(B)正确.

解：记由三个平面方程组成的线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，则由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 知其对应的齐次线性方程组的基础解系所含解向量个数为 $3-r(\boldsymbol{A})=1$，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解形式应为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数})$$

在空间直角坐标系中，上式显然是一直线方程，即三平面交于一直线，故选(B).

题型 156 有关基础解系的命题

思路启迪：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，要求满足：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

(3) $s=n-r(\boldsymbol{A})$.

例 6 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系（　　）.

(A) 不存在　　(B) 仅含一个非零解向量

(C) 含有两个线性无关的解向量　　(D) 含有三个线性无关的解向量

分析：要确定基础解系含向量的个数，实际上只要确定未知数的个数和系数矩阵的秩.

解：因为基础解系所含向量的个数 $=n-r(\boldsymbol{A})$，而且

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n\\1, & r(\boldsymbol{A})=n-1\\0, & r(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$$

根据已知条件 $\boldsymbol{A}^*\neq 0$，于是 $r(\boldsymbol{A})$ 等于 n 或 $n-1$. 又 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有互不相等的解，即解不唯一，故 $r(\boldsymbol{A})=n-1$. 从而基础解系仅含一个解向量，故选(B).

例 7 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中 t_1,t_2 为实常数，试问 t_1,t_2 满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系？

分析：只要 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关即可.

解：由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，所以由题设知，当 t_1,t_2 使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

因为

$$(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}t_1&0&\cdots&t_2\\t_2&t_1&\cdots&0\\0&t_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&t_1\end{pmatrix}$$

所以当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s \neq 0$$

因此当 t_1, t_2 满足 $t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s \neq 0$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

题型 157　线性方程组的求解

思路启迪：对于 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，一般用以下方法：

(1) 当 $m=n$ 且 $n\leqslant 3$ 时，通常利用系数行列式进行讨论：当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，且能用克莱姆法则（或矩阵运算）求出；当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，若有参数可通过 $|\boldsymbol{A}|=0$ 确定参数，然后利用矩阵行的初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 或 $\overline{\boldsymbol{A}}\to$ 阶梯形，判别有无解，有解时，求出通解.

(2) 当 $m\neq n$ 或 $n>3$ 时，利用矩阵行的初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 或 $\overline{\boldsymbol{A}}\to$ 阶梯形；若有参数，则对参数讨论方程组有无解，有解时求出解. 变量的系数中不含参数的方程组也用此方法.

例 8　k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ 有唯一解、无解、无穷多组解？若有解时，求出其全部解.

解：$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(k^2-3k-4) = -(k-4)(k+1)$

当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $k\neq -1, 4$ 时，方程组有唯一解，用克莱姆法则求之，则

$$x_1 = \frac{k^2+2k}{k+1} \qquad x_2 = \frac{k^2+2k+4}{k+1} \qquad x_3 = \frac{-2k}{k+1}$$

当 $k=-1$ 时，方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=4 \\ -x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$，而其中的第一、二个方程显然不可能同时成立，所以该方程组无解.

当 $k=4$ 时，方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=4 \\ -x_1+4x_2+x_3=16 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$，增广矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，可知方程组有无穷多解，对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 + 4 \end{cases}$$

令 $x_3 = k$，则得通解 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k 为任意实数.

例 9　已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0 \end{cases}$$

(1) a,b,c 满足何种关系时，方程组仅有零解？

(2) a,b,c 满足何种关系时，方程组有无穷多组解？并用基础解系表示全部解.

分析：注意到所给方程组的系数行列式为范德蒙行列式，并可由它是否为零来确定方程组仅有零解或有无穷多组解.

解：所给方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

(1) 当 a,b,c 两两不同，即 $a \neq b, b \neq c, a \neq c$ 时，$D \neq 0$，从而所给方程组只有零解.

(2) 当 a,b,c 中至少有两个相同时，$D=0$，从而所给方程组有无穷多组解. 现用基础解系表示全部解，为此分 4 种情形讨论：

① 当 $a=b\neq c$ 时，所给方程组与 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ 同解，从而有基础解系 $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，因此全部解为 $k_1(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1 为任意常数；

同样可以得到：

② $a=c\neq b$，解为 $k_2(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_2 为任意常数；

③ $b=c\neq a$，解为 $k_3(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_3 为任意常数；

最后考虑：

④ $a=b=c$ 时，所给方程组与 $x_1+x_2+x_3=0$ 同解，从而有基础解系 $(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，因此全部解为 $k_4(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_5(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_4,k_5 为任意常数.

注：范德蒙行列式是常用行列式，应记住它的计算公式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)$$

例 10　已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$；

(2) 求 a,b 的值及方程组的通解.

分析:(1) 根据系数矩阵的秩与基础解系的关系证明;

(2) 利用初等变换求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩确定参数 a,b,然后解方程组.

解:(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

则有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,且线性无关. 否则,易推出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,矛盾.

所以 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,即 $4-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2\Rightarrow r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

又矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个二阶子式 $\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$,所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&1-a&3-a&b-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&0&4-2a&b+4a-5\end{bmatrix}$$

又 $r(\boldsymbol{A})=2$,则

$$\begin{cases}4-2a=0\\b+4a-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$$

对原方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换,即

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故原方程组与下面的方程组同解

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}$$

选 x_3,x_4 为自由变量,则

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}$$

故所求通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

例 11　已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为四维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

分析:由 $\boldsymbol{\beta}$ 的表达式可知,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有特解 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,因此只要考虑对应的齐次线性方程组的

通解即可.

解：由题设知 $r(\boldsymbol{A})=3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=0$，知 $\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\quad (k\text{ 为任意常数})$$

例 12 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0\\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0\\ \cdots\\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0\end{cases}$$

其中 $a\neq 0,b\neq 0,n\geqslant 2$. 试讨论 a,b 为何值时，方程组仅有零解、无穷多组解？在有无穷多组解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

分析：从计算系数行列式入手.

解：所给方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

由此可知，

(1) 当 $a+(n-1)b\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时，即 $a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时，方程组仅有零解.

(2) 当 $a+(n-1)b=0$ 或 $a=b$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，所给方程组有无穷多解.

① 当 $a=b$ 时，所给方程组与方程 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0$ 同解，所以方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm T},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm T}$$

故方程组的全部解是 $x=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 为任意常数.

② 当 $a=(1-n)b$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(1-n)b&b&b&\cdots&b\\b&(1-n)b&b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&(1-n)b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}(1-n)b&b&b&\cdots&b\\nb&-nb&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\nb&0&0&\cdots&-nb\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}(1-n)b&b&b&\cdots&b\\1&-1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\1&-1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&-1\end{pmatrix}$$

则 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，取 x_1 为自由变量，可得方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1,\cdots,1)^T$. 故方程组的全部解是 $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{\beta}$，其中 c 为任意常数.

注：讨论由 n 个 n 元线性方程组成的方程组的解的时候，一般是从计算它的系数行列式入手.

题型 158　矩阵方程的求解

思路启迪：求解矩阵方程问题，一般是先将其化为矩阵方程的基本型，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$，若系数矩阵可逆，则利用逆矩阵求解，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$；若系数矩阵不可逆，则要转化为线性方程组，再用初等变换求解. 另外，要注意，化矩阵方程为基本型的过程中，要注意矩阵的左乘、右乘；还要注意矩阵乘法满足结合律，以此可简化计算.

例 13　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}^4$.

解：由 $\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{X}$ 可得 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$，则 $\boldsymbol{X}^4=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}^4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$，而

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}\quad(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{X}^4=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^4&0&0\\0&(-1)^4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例 14　已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 6，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解：因为 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&2&3\end{vmatrix}=0$，所以由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$ 可知 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，由题设可知 $\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=6\\a_{21}+a_{22}+a_{23}=6\\a_{31}+a_{32}+a_{33}=6\end{cases}$，即 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

于是 $\lambda=6$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

又 $AB=B$，即 $A\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，即 $\lambda=1$ 为 A 的特征值，有两个线性无关的特征向量，显然 B 的前两列线性无关，为 $\lambda=1$ 对应的特征向量. 将 B 的第 3 列换为 $(1,1,1)^T$，组成新的矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$，因为不同特征值对应的特征向量线性无关，则该矩阵可逆，且

$$A\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&6\\2&1&6\\1&2&6\end{pmatrix}$$

故 $A=\begin{pmatrix}1&1&6\\2&1&6\\1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}16&-5&-5\\15&-4&-5\\15&-5&-4\end{pmatrix}$.

例 15 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$A=\boldsymbol{\alpha\beta}^T$，$B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\beta}^T$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x}=A^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

分析：先化简方程为基本型 $AX=B$ 或 $XA=B$ 或 $AXB=C$，然后再求解.

解：由题设可得

$$A=\boldsymbol{\alpha\beta}^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

又 $A^2=\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{\alpha\beta}^T=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T=2A$，$A^4=8A$，代入原方程得

$$16A\boldsymbol{x}=8A\boldsymbol{x}+16\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}\qquad\text{即 } 8(A-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}\tag{1}$$

因为 $(A-2E)$ 不可逆，故对式(1)的增广矩阵施行初等行变换

$$\left(\begin{array}{ccc:c}-1&\frac{1}{2}&0&0\\2&-1&0&0\\1&\frac{1}{2}&-2&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

由此得到式(1)对应的齐次方程组的基础解系为 $(1,2,1)^T$，且式(1)有特解 $(0,0,-\frac{1}{2})^T$，故原方程的通解为

$$\boldsymbol{x}=k(1,2,1)^T+(0,0,-\frac{1}{2})^T\qquad(k\text{ 为任意常数})$$

题型 159　讨论两个线性方程组解之间的关系

思路启迪：情形 1　求 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 的非零的公共解(零公共解一定存在).

一般方法：① 求 $\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}$ 新方程组的非零解；

② 将 $Ax=0$ 的通解表达式 $x=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$ 代入 $Bx=0$，确定 $k_1,\cdots,k_s$ 应满足的条件($k_1,\cdots,k_s$ 不全为零).

情形 2　讨论 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

一般方法：① 将 $Ax=0$ 的基础解系代入 $Bx=0$；反过来，再将 $Bx=0$ 的基础解系代入 $Ax=0$，若都满足，则同解；

② $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Leftrightarrow A$、B 的行向量组等价.

例 16　设四元线性方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$，又已知齐次线性方程组(Ⅱ)的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$

(1) 试求方程组(Ⅰ)的基础解系；

(2) 问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解；若没有，则说明理由.

解：(1)方程组(Ⅰ)的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

所以(Ⅰ)的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则可求得(Ⅰ)的基础解系为

$$\eta_1=(0,0,1,0)^T\qquad\eta_2=(-1,1,0,1)^T$$

(2) **方法 1**　将(Ⅱ)的通解代入方程组(Ⅰ)，则有

$$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\k_1+2k_2-k_2=0\end{cases}$$

解得 $k_1=-k_2$，则向量

$$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T=-k_2(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T=k_2(-1,1,1,1)^T$$

是方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解.

当 $-k_2\neq0$ 时，有 $k_2(-1,1,1,1)^T\neq0$，故方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的所有非零公共解是 $k(-1,1,1,1)^T$，其中 k 是任意非零常数.

方法 2　由(Ⅰ)和(Ⅱ)的通解表达式相等，得

$$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T=k_3(0,0,1,0)^T+k_4(-1,1,0,1)^T$$

即 $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\\ k_4\end{pmatrix}=0$，因为 $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以上述方程的解为 $k(-1,1,1,1)^T$，于是方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的所有非零公共解是 $k(-1,1,1,1)^T$，其中 k 是任意非零常数.

例 17　已知下列非齐次线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6\\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1\\ 3x_1-x_2-x_3=3\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})\begin{cases}x_1+mx_2-x_3-x_4=-5\\ nx_2-x_3-2x_4=-11\\ x_3-2x_4=-t+1\end{cases}$$

(1) 求解方程组(Ⅰ)，用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 当方程组(Ⅱ)中的参数 m,n,t 为何值时，方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)同解?

分析：(1) 对(Ⅰ)的增广矩阵施行初等行变换求导出组的基础解系及(Ⅰ)的通解.

(2) 将(Ⅰ)的通解代入(Ⅱ)的各个方程，确定参数 m,n,t，并检验对此参数，(Ⅰ)和(Ⅱ)同解.

解：(1) 对(Ⅰ)的增广矩阵 $\bar{A}$ 施行初等行变换

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & -2 & -6\\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5\end{array}\right)$$

所以(Ⅰ)的导出组有基础解系 $(1,1,2,1)^T$，(Ⅰ)有特解 $(-2,-4,-5,0)^T$，因此(Ⅰ)的通解为

$$x=\begin{pmatrix}-2\\ -4\\ -5\\ 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\quad(c\text{ 为任意常数})$$

(2) 将(Ⅰ)的通解代入(Ⅱ)的各个方程得

$$\begin{cases}(c-2)+m(c-4)-(2c-5)-c=-5\\ n(c-4)-(2c-5)-2c=-11\\ (2c-5)-2c=-t+1\end{cases}$$

解之得 $m=2,n=4,t=6$. 于是(Ⅱ)成为

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4=-5\\ 4x_2-x_3-2x_4=-11\\ x_3-2x_4=-5\end{cases}$$

对它的增广矩阵 $\bar{B}$ 施行初等行变换得

$$\bar{B}=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 2 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 4 & -1 & -2 & -11\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5\end{array}\right)$$

由此可知 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 等价，因此当 $m=2,n=4,t=6$ 时，方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)同解.

例 18　设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

分析：将方程组和方程合并，然后利用非齐次线性方程有解的判定条件求得 a.

解：将方程组和方程合并后可得线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$$

对其系数矩阵施行初等行变换

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，当有公共解时，a 的值为 1 或 2，且：

当 $a=1$ 时，可求得公共解为 $\boldsymbol{\xi}=k(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数；

当 $a=2$ 时，可求得公共解为 $\boldsymbol{\xi}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

第 18 章　特征值与特征向量

●重要定理、公式和结论

18.1　重要结论

(1) 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

① $k\boldsymbol{A}, a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^2, f(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 分别有特征值 $k\lambda, a\lambda+b, \lambda^2, f(\lambda), \dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$（$\boldsymbol{A}$ 可逆），且对应的特征向量是相同的.

② $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 具有相同的特征值，但对应的特征向量不一定相同.

③ $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$，但推不回去.

④ $r(\boldsymbol{A})$ 为非零特征值的个数.

⑤ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不等于零. 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 之间的特征值成倒数关系，且对应的特征向量相同. $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $|\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}$.

⑥ $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为模长等于 1 的复数，特别地，$\boldsymbol{A}$ 的实特征值为 ±1.

(2) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值，则

① $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+\cdots+a_{nn}=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$；

② $\lambda_1\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

① $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$（当 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 可逆时），$\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$；

② $f(\boldsymbol{A})=f(\boldsymbol{B})$，$f$ 是多项式；

③ $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|, r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}), \sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ii}$，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$；

④ 对任意实数 λ，有 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\Rightarrow\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

注：① $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，但 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\nRightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

② $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，但对应的特征向量不一定相同.

③ 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 λ，且对应的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$（其中 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量）.

●核心题型及思路启迪

18.2　矩阵的特征值与特征向量

题型 160　求数值型矩阵的特征值与特征向量

思路启迪：一般通过$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$直接计算特征值，然后求特征向量. 具体过程如下：

(1) 令$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求得 s 个不同的特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$.

注：求三阶以上特征多项式的处理技巧：

① 尽量在计算的过程中利用行列式的性质先提出含 λ 的一次公因子；

② 将不含 λ 的先化为零；

③ 尽量不要算出 λ 的三次多项式，再分解因子.

(2) 对于特征值 λ_i，解$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_{i1},\boldsymbol{\xi}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{ir}$，则属于特征值 λ_i 的全部特征向量为 $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{\xi}_{i1}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{\xi}_{i2}+\cdots+\boldsymbol{C}_r\boldsymbol{\xi}_{ir}$，其中 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots,\boldsymbol{C}_r$ 不全为零.

例 1　计算矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$的特征值及对应的特征向量.

解：$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\-2&\lambda-2&2\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\0&\lambda&\lambda\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\0&1&1\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&2&0\\0&1&0\\2&2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-4)$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值$\lambda=4,0$(二重).

对应$\lambda=4$，由$(4\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$)得

$$\begin{cases}4x_1+2x_2+2x_3=0\\-2x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1+2x_2+2x_3=0\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$$

则基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，故对应于$\lambda=4$ 的全部特征向量为 $k(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为非零常数.

对应$\lambda=0$，由$(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$)得

$$\begin{cases}2x_2+2x_3=0\\-2x_1-2x_2+2x_3=0\\2x_1+2x_2-2x_3=0\end{cases} \quad 即\begin{cases}x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

则基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_2=(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，故对应于 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $k_1(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1 为非零常数.

例 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$，求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

分析：先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量，再利用特征值与特征向量的概念计算 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

解：$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{第2,3行加到第1行}}\begin{vmatrix}\lambda-7&\lambda-7&\lambda-7\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-7)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-7)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&\lambda-1&0\\-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-1)^2$$

由上可知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=7,1$(二重).

解 $(1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，于是属于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{C}_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$ 是不全为零的常数.

解 $(7\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，于是属于 $\lambda=7$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{C}_3(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{C}_3$ 是不为零的常数.

设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，得

$$(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\boldsymbol{A}^*}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{x})+2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$$

$$=\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\boldsymbol{A}^*}{\lambda}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})+2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{-1}\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2\right)(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})$$

由此可知，$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\mu=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$，属于 μ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$，又 $|\boldsymbol{A}|=7$，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=7,1$(二重)，因此 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 9,3,3.

对应特征值 9 的特征向量为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\left[\boldsymbol{C}_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{C}_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left[C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

其中 C_1, C_2 是不全为零的任意常数.

对应特征值 3 的特征向量为

$$P^{-1}\beta=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot C_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot C_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=C_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

其中 C_3 为不为零的任意常数.

题型 161　求抽象矩阵的特征值与特征向量

思路启迪: (1) 若 A 满足 $f(A)=0$, 用 $Ax=\lambda x$;

(2) 若 A 满足 $|aE+bA|=0(b\neq0)$, 用 $|\lambda_0E-A|=0$.

注: $|aE+bA|=\left|-b\left(-\frac{a}{b}E-A\right)\right|=(-b)^n\left|-\frac{a}{b}E-A\right|=0\Rightarrow\lambda_0=-\frac{a}{b}$.

例 3　设 A 为 3 阶实对称矩阵, 且满足条件 $A^2+2A=O$, 已知 A 的秩 $r(A)=2$. 求 A 的全部特征值.

解: 设 λ 是 A 的特征值, 则由 $A^2+2A=O$ 得 $\lambda^2+2\lambda=0$, 解之得 $\lambda=0,-2$. A 是三阶实对称矩阵, 它应有三个特征值为 0,0,−2 或 0,−2,−2.

当特征值为 0,0,−2 时, 有 $A\sim\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-2\end{pmatrix}$, 此时 $r(A)=1$, 不合题意;

当特征值为 0,−2,−2 时, 有 $A\sim\begin{pmatrix}0&&\\&-2&\\&&-2\end{pmatrix}$, 此时 $r(A)=2$.

所以 A 的全部特征值为 0,−2,−2.

例 4　设 A 为 n 阶矩阵, $|A|\neq0$, A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ, 求 $(A^*)^2+E$ 的特征值.

解: 当 A 有特征值 λ 时, A^* 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$, 所以 $(A^*)^2+E$ 有特征值 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

例 5　设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量, 且满足条件 $\alpha^T\beta=0$. 记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$, 求 (1) A^2; (2) 矩阵 A 的特征值和特征向量.

分析: (1) 可由 $A^2=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T$ 直接计算.

(2) 先利用 A^2 的特征值算出 A 的特征值, 然后计算 A 的特征向量.

解: (1) $A^2=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=\alpha(\alpha^T\beta)\beta^T=O$;

(2) 设 λ 是 A 的任一特征值, 则 λ^2 是 A^2 的特征值. 由 $A^2=O$ 知 $\lambda=0$, 即 A 的特征值全部为零.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是 A 的特征向量, 则满足 $Ax=0$, 即

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

由于 $\boldsymbol{\beta}$ 是非零向量,不妨设 $b_1 \neq 0$,则上述方程组有基础解系

$$\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\cdots,\left(-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}$$

于是所对应的全部特征向量为

$$C_1\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}+C_2\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}+\cdots+C_{n-1}\left(-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}$ 不全为零.

注:本题的矩阵的秩为 1,一般对秩为 1 的方阵 $\boldsymbol{A}$,有以下结论:

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,则 $r(\boldsymbol{A})=1$ 的充分必要条件为存在两个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$.

题型 162 特征值与特征向量的逆问题

思路启迪:(1) 若已知特征向量 $\boldsymbol{\xi}$,则用 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$;

(2) 若只知特征值 λ_0,则用 $|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

(3) 若已知特征值和特征向量条件求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 时,要想到利用 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$(其中 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵,$\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵).

例 6 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$,且 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 又设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0,属于 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,求 a,b,c 及 λ_0 的值.

分析:利用 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$,$|\boldsymbol{A}|=-1$ 即可求得 a,b,c 及 λ_0 的值.

解:由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$,有 $\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A\alpha}$,从而 $-\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A\alpha}$,即

$$\lambda_0\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\text{可得}\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 \\ \lambda_0(-5-b+3)=1 \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 \end{cases}$$

解之得 $\lambda_0=1,b=-3,a=c$.

将其代入 $|\boldsymbol{A}|=-1$,有 $\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=a-3=-1$,解之得 $a=2$.

故 $a=2,b=-3,c=2,\lambda_0=1$.

注:当问题中涉及 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 时,要想到 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,另外,当 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值时,$\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$,且对应的特征向量是相同的.

例 7　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，x，y 应满足什么条件？

解：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{(3)+(1)}\begin{vmatrix}\lambda-1&0&\lambda-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-x&\lambda-1&x-y\\-1&0&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1.\ \lambda_3=-1$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，因此，对应于二重特征根 1，应有 2 个线性无关的特征向量，所以$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$的秩为 1.

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&x+y\\0&0&0\end{pmatrix}$$

要使$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$的秩为 1，$x$ 和 y 应满足 $x+y=0$.

例 8　设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 $-1,0,1$，对应的特征向量分别为

$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,a+3,a+2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a-2,-1,a+1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2a,-1)^{\mathrm{T}}$，且有

$\begin{vmatrix}a&-5&8\\0&a+1&8\\0&3a+3&25\end{vmatrix}=0$，试确定参数 a 的值，并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解：由 $0=\begin{vmatrix}a&-5&8\\0&a+1&8\\0&3a+3&25\end{vmatrix}=a(a+1)$ 可得 $a=-1,0$.

当 $a=-1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，这与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是对应不同特征值的特征向量矛盾（因为不同特征值对应的特征向量线性无关），因此 $a\neq-1$，故 $a=0$. 此时

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,3,2)^{\mathrm{T}}\qquad\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}\qquad\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$，且 $\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-3&2&-3\\-5&4&-6\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$，从而有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{pmatrix}$$

18.3 相似矩阵及其对角化

题型 163 相似矩阵的判定及其逆问题

思路启迪：(1) 若 $A\sim\Lambda, B\sim\Lambda$，则可推出 $A\sim B$.

(2) 已知 $A\sim B$，则 $|A|=|B|$，$\mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}\,B$ 且对任意的 λ，有 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.

例 9 设有 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$，试判断 A,B 是否相似.

分析：若直接由 $B=M^{-1}AM$ 求 M，显然相当复杂，可以变换一下思路：若 A,B 都相似于同一对角矩阵，则也可得证 A,B 相似.

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$，

得 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

由 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda+1&0\\0&6&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$，

得 B 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

由上可知，A 和 B 均有三个不相同的特征值，因此 A 和 B 同时与对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，由相似关系的对称性与传递性可知，A 和 B 相似.

例 10 设矩阵 A 和 B 相似，其中

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$$

试求 x 和 y.

分析：这是相似矩阵的逆问题，即已知两矩阵相似，反过来求矩阵的参数，根据矩阵 A 和 B 的特征及相似矩阵的性质，可以考虑用如下方法确定参数 x 和 y：

(1) 相似矩阵有相同的特征多项式；

(2) B 为对角矩阵，A 的特征值即为 B 的对角线元素，以此求出 x 和 y.

解：**方法 1** 因为 $A\sim B$，故 A,B 有相同的特征多项式，即

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$$

得 $(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$.

令 $\lambda=0$，得 $2(x-2)=2y$，即 $y=x-2$；令 $\lambda=1$，得 $y=-2$，从而 $x=0$.

方法 2 因为 B 为对角矩阵，又 $A\sim B$，所以 A 有特征值 $-1,2$ 和 y，而特征方程为

$$|\lambda E-A|=(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]$$

将 $\lambda=-1$ 代入得 $x=0$，又由 $\operatorname{tr} A=\operatorname{tr} B$，即 $-2+x+1=-1+2+y$，得 $y=-2$.

题型 164　矩阵可对角化的判定及其逆问题

思路启迪： A 可对角化 $\Leftrightarrow \lambda_i$ 为 k_i 重根，则属于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数：

$$n-r(\lambda_i E-A)=k_i$$

先求特征值，再分析判定. 另外，实对称阵一定可对角化.

例 11　设 $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$，求 A 的特征值，判断 A 是否相似于对角矩阵. 若相似于对角阵，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解： A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&-3\\-3&\lambda+5&-3\\-6&6&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$.

要使 A 相似于对角阵，对应于二重根 -2，A 应有两个线性无关的特征向量，此时特征矩阵 $-2E-A$ 的秩 $=3-2=1$. 用初等变换法求秩：

$$-2E-A=\begin{pmatrix}-3&3&-3\\-3&3&-3\\-6&6&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(-2E-A)=1$，因此矩阵 A 相似于对角阵. 求出属于特征值 -2 的特征向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

对应于 $\lambda_3=4$ 的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，取 $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

例 12　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，问当 k 为何值时，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵？并求出 P 和相应的对角矩阵.

分析： 只要确定 k 为何值时，A 有三个线性无关的特征向量即可.

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ k & \lambda+1 & -k\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$（二重），$\lambda_2=1$.

当 $\lambda=\lambda_1=-1$ 时，

$$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ k & 0 & -k\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ k & 0 & -k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以只有当 $k=0$ 时，$r(\lambda_1E-A)=1$，对应 $\lambda=\lambda_1=-1$，A 有两个线性无关的特征向量，从而 A 有三个线性无关的特征向量，也就是说，当 $k=0$ 时，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

当 $k=0$ 时，$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$，$A$ 的对应于 $\lambda=\lambda_1=-1$ 的特征向量为

$$\alpha_1=(-1,2,0)^{T}\qquad \alpha_2=(1,0,2)^{T}$$

A 的对应于 $\lambda=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\alpha_3=(1,0,1)^{T}$.

所以 $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，相应的对角阵为 $\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

例 13 设 A 是 3 阶矩阵，α 是三维列向量，$\alpha,A\alpha,A^2\alpha$ 线性无关. 如果 $3A\alpha-2A^2\alpha-A^3\alpha=0$，证明：$A$ 相似于对角阵，并求 $|A+E|$.

分析：证明 3 阶矩阵 A 有三个线性无关的特征向量即可.

证：因为 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha$ 线性无关，所以 $P=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)$ 可逆.

由 $A^3\alpha=0\cdot\alpha+3A\alpha-2A^2\alpha$，有

$$A(\alpha\quad A\alpha\quad A^2\alpha)=(A\alpha\quad A^2\alpha\quad A^3\alpha)=(\alpha\quad A\alpha\quad A^2\alpha)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

即 $AP=P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$，因此 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=B$，即 $A\sim B$.

又 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -1 & \lambda & -3\\ 0 & -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+3)$，故 B 的特征值为 0，1 和 -3，而 $A\sim B$，因此 A 的特征值也为 0，1 和 -3，即 A 有三个不同的特征值，所以 A 相似于对角阵.

由于 $A+E$ 的特征值为 1，2 和 -2，故 $|A+E|=1\times2\times(-2)=-4$.

题型 165 有关实对称矩阵的命题

思路启迪：利用实对称矩阵特征值和特征向量的性质进行讨论：

(1) 实对称矩阵必能相似对角化，且可用正交矩阵相似对角化；

(2) 实对称矩阵不同特征值的特征向量相互正交；

(3) 实对称矩阵的特征值必是实数.

例 14　设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的特征向量. 求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和对应的特征向量.

分析：由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，立即可得 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值为 0. 再由实对称矩阵不同特征值所对应的特征向量正交可得相应的特征向量.

解：因为 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量有 2 个. 由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的线性无关特征向量.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值 $\lambda_3=0$. 设 $\lambda_3=0$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则有 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$，即

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 全部特征向量为

$$k\boldsymbol{\alpha}=k(-1,1,1)^{\mathrm{T}}\qquad(k\text{ 为任意不为零的常数})$$

例 15　设 6，3 和 3 为 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且属于 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解：设对应 $\lambda=6$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，不同特征值对应的特征向量正交，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}-x_1+x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$$

可解得该方程组的基础解系为 $(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，于是可取 $\boldsymbol{\beta}=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

$$\text{记 }\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\text{，且}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}$，从而有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-1&4&-1\\1&-1&4\end{pmatrix}$$

第19章 二次型

●重要定理、公式和结论

19.1 重要结论

(1) $\boldsymbol{A}$ 正定$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{*}$ 均正定.

(2) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 正定$\Rightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定，但 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$ 不一定正定；若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 正定，且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换，则 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 正定.

(3) $\boldsymbol{A}$ 正定$\Leftrightarrow$① $\forall \boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}>0$；

② $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式均大于零；

③ $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都大于零；

④ 二次型的正惯性指数为 n；

⑤ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},|\boldsymbol{P}|\neq 0$；

⑥ 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n],\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

●核心题型及思路启迪

19.2 二次型题型

题型166 二次型所对应的矩阵及其性质

思路启迪： 搞清二次型对应的矩阵、二次型的秩、正负惯性指数等概念.

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$ 定义为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩.

(2) 标准型：$f=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$.（不唯一）

(3) 规范型：$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,p\leqslant r\leqslant n$.（唯一）

二次型的规范型是唯一的. 其中 p(A 的大于 0 的特征值的个数）称为二次型的正惯性指数，r 称为二次型的秩，$r-p$(A 的小于 0 的特征值的个数)称为二次型的负惯性指数，这三个数是二次型在可逆线性变换下的不变量.

例 1　填空题.

(1) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则$c=$________.

(2) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$ 为非零二次型，二次型所对应的矩阵为____________. 当 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$，二次型的正惯性指数为 ________，负惯性指数为 ________.

分析：二次型对应的矩阵是对称矩阵. 若 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非对称，用对称矩阵$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$变换矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解：(1) 二次型所对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$，因 $r(\boldsymbol{A})=2$，故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{vmatrix}=24c-72=0$$

解得 $c=3$.

(2) 记 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}{2}\right)\boldsymbol{X}$$

二次型所对应的矩阵为 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}{2}$.

由 $f\neq0$ 知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量，而 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，因此 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关. 由此可作非退化的线性变换，使

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3,\quad y_2=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$$

此时二次型成为 $f=y_1y_2$，令 $y_1=z_1+z_2$，$y_2=z_1-z_2$，$y_3=z_3$，则得规范型 $f=z_1^2-z_2^2$，因此 f 的正惯性指数为 1，负惯性指数也为 1.

例 2　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=n$，A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，二次型为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$$

(1) 记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式，并证明二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 的规范型是否相同？并说明理由.

分析：(1) 将二次型写成矩阵形式 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$，并证明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为对称矩阵.

(2) 因为合同矩阵对应的二次型具有相同的规范型，所以只要证明 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解：(1) 二次型的矩阵形式为

$$f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$$

且由$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$知，$\boldsymbol{A}^{-1}$是实对称矩阵，所以二次型$f(\boldsymbol{X})$的矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$知$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{A}^{-1}$，因此二次型$g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$与$f(\boldsymbol{X})$的规范型相同.

题型 167　用正交变换法化二次型为标准型

思路启迪：正交变换法$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$($\boldsymbol{Q}$为正定矩阵)化二次型为标准型的具体步骤为：

(1) 首先写出二次型矩阵$\boldsymbol{A}$，并求出$\boldsymbol{A}$的全部特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

(2) 对每个特征值求出相应的特征向量.

(3) 对应不同的特征值的特征向量是相互正交的，单重特征值对应的特征向量，只需将其单位化，对应k重根的特征值，应先找出k个线性无关的特征向量，然后正交化，再将其单位化.

(4) 由前面求出的n个线性无关的正交特征向量组成的矩阵$\boldsymbol{Q}$即为其所求的正交矩阵. 作正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，则

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$$

$$=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$既合同又相似.

这种方法只是对实二次型，这时不仅要求线性变换的矩阵是可逆的，而且是正交矩阵，即$\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$.

注：对于实对称矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，若存在可逆阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则称$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为合同矩阵.

例 3　已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$经正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$可化成标准型$f=6y_1^2$，求常数$a$.

分析：利用f的两个表达式的矩阵相似即可.

解：$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}$$

与 $f=6y_1^2$ 的矩阵 $B=\begin{bmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ 相似，所以 $\mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}\,B$，即 $3a=6$，故 $a=2$.

例 4 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3 \qquad (b>0)$$

其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

分析：(1) 利用特征值之和，即 A 的主对角线上元素之和及特征值之积，即 $|A|$，确定 a,b 的值；

(2) 用通常方法计算正交变换与正交矩阵.

解：(1) $f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$ 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{bmatrix}$$

由特征值之和，即 A 的主对角线上元素之和及特征值之积，即 $|A|$ 可得

$$\begin{cases}a+2+(-2)=1\\-4a-2b^2=-12\end{cases}$$

解之得 $a=1,b=2$.

(2) 将 $a=1,b=2$ 代入 A 可得

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{bmatrix}$$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$ 得 A 的特征值为 $\lambda=-3,2,2$. 容易算得对应的特征向量为

$$\alpha_1=(1,0,-2)^{\mathrm{T}} \qquad \alpha_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}} \qquad \alpha_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$$

显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是正交向量组，现将它们单位化得

$$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)^{\mathrm{T}} \qquad \beta_2=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^{\mathrm{T}} \qquad \beta_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$$

记 $Q=(\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}&0\\0&0&1\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\end{bmatrix}$，则相应的正交变换为 $X=QY$，其中 $Y=(y_1,y_2,$

$y_3)^{\mathrm{T}}$，在此正交变换下，$f(y_1,y_2,y_3)=-3y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.

例 5 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2x_1x_3+2\beta x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 是三维列向量，$\boldsymbol{Q}$ 是 3 阶正交矩阵，试求常数 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$.

分析：经正交变换，原二次型的矩阵和新二次型的矩阵相似，因此它们有相同的特征多项式.

解：变换前后二次型的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$$

$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 经过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化为 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BY}$，所以 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，即

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-\alpha&-1\\-\alpha&\lambda-1&-\beta\\-1&-\beta&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&&\\&\lambda-1&\\&&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+(2-\alpha^2-\beta^2)\lambda+(\alpha-\beta)^2=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$$

比较 λ 的同次幂系数得 $2-\alpha^2-\beta^2=2$，$(\alpha-\beta)^2=0$.

故 $\alpha=\beta=0$.

例 6 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值；

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准型；

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解：(1) 二次型矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

由二次型的秩为 2 可知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{vmatrix}=0$，得 $a=0$.

(2) 由解(1)知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，可求出其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

因为
$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组为 $x_1-x_2=0$，经过观察，可得属于特征值 $\lambda=2$ 的正交的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$，故取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已经正交，直接将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1\quad\boldsymbol{\eta}_2\quad\boldsymbol{\eta}_3)$，它即为所求的正交变换矩阵. 由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，可化原二次型为标准型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2$$

(3) 由 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2=0$，得 $y_1=0,y_2=0,y_3=k$（k 为任意常数）. 从而所求解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}=(\boldsymbol{\eta}_1\quad\boldsymbol{\eta}_2\quad\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}=k\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}c\\-c\\0\end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数.

注：在求有重根的特征值对应的特征向量时，有意取正交的两个向量，这样可省去正交的步骤，简化计算.

例 7　已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正惯性指数为 1，负惯性指数为 0.

(1) 求正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，化此二次型为标准型；

(2) 计算 $\max\limits_{X^{\mathrm{T}}X=2} f(x_1,x_2,x_3)$.

解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{pmatrix}$，由于 $r(\boldsymbol{A})=1+0=1\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=-(a-1)^2(a+2)=0$

若 $a=1$，则 $r(\boldsymbol{A})=1$，符合题意；若 $a=-2$，则 $r(\boldsymbol{A})=2$，不合题意.

故 $a=1$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$，解 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 可得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$.

因为
$$0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组为 $x_1+x_2-x_3=0$.

经过观察，可取属于特征值 $\lambda=0$ 的正交的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为属于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$，故取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已经正交，直接将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

令 $Q=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，则 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$. 令 $X=QY$，其中 $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$f=x^{\mathrm{T}}Ax=y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}AQy=3y_3^2$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2=X^{\mathrm{T}}X=(QY)^{\mathrm{T}}QY=Y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QY=Y^{\mathrm{T}}Y=\sum\limits_{i=1}^{3}y_i^2$.

当 $X^{\mathrm{T}}X=2$ 时，$Y^{\mathrm{T}}Y=2$，则 f 在 $X^{\mathrm{T}}X=2$ 下的最大值，即在 $Y^{\mathrm{T}}Y=2$ 下的最大值为取 $Y=(0,0,\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$，得 $f_{\max}=f|_{Y=(0,0,\sqrt{2})^{\mathrm{T}}}=6$.

题型 168　有关正定的判定

思路启迪：(1) 若 A 为数值型，根据所有的顺序主子式是否全大于零或特征值是否全大于零来判定，若全大于零，则二次型或矩阵为正定.

(2) 若 A 为抽象型，则可用特征值是否全大于零或用定义：任意 $x\neq 0$，$x^{\mathrm{T}}Ax>0$ 来判定.

例 8　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，试问当 λ 取何值时，f 是正定的.

解：二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&-1\\1&-1&\lambda\end{pmatrix}$，它的顺序主子式为

$$\lambda,\ \begin{vmatrix}\lambda&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1,\ |A|=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

若要使 f 是正定，λ 必须满足

$$\begin{cases}\lambda>0\\ \lambda^2-1>0\\ (\lambda-2)(\lambda+1)^2>0\end{cases}$$

解此不等式组得 $\lambda>2$.

例 9　设有 n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数，试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型？

分析：由于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$，所以只要寻找当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为 0 时使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 的条件成立即可.

解：显然 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$. $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 当且仅当下列方程组成立

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0\\ x_2+a_2x_3=0\\ \vdots\\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0\\ x_n+a_nx_1=0\end{cases}$$

方程组的系数行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a_1&0&\cdots&0\\0&1&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n$$

因此方程组只有零解的充要条件是 $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq0$.

所以,当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq0$ 时,对任意一组不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$,即二次型正定.

例 10 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $B=(kE+A)^2$,其中 k 为实数,E 为单位矩阵,求对角阵 Λ,使 B 与 Λ 相似,并求 k 为何值时,B 为正定矩阵.

分析:如果 A 相似于对角阵 Λ,即存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$,则 $P^{-1}f(A)P=f(\Lambda)$. 此时判定是否正定,从特征值出发比较方便.

解:矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$.

由于 A 是实对称矩阵,所以 A 相似于对角阵,即存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}=\Lambda$,因此 $P^{-1}(kE+A)P=\begin{pmatrix}k&&\\&k+2&\\&&k+2\end{pmatrix}$,从而 $P^{-1}(kE+A)^2P=P^{-1}(kE+A)PP^{-1}(kE+A)P=\begin{pmatrix}k^2&&\\&(k+2)^2&\\&&(k+2)^2\end{pmatrix}$

$B=(kE+A)^2$ 的三个特征值为 $k^2,(k+2)^2,(k+2)^2$. 当特征值全大于零,即 $k\neq0$ 且 $k\neq-2$时,B 为正定矩阵.

例 11 设 A 为 n 阶正定矩阵,E 是 n 阶单位矩阵,证明 $E+A$ 的行列式大于 1.

分析:从特征值出发证明. 由正定矩阵 A 的特征值大于零导出 $E+A$ 的特征值大于 1.

解:设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值,则 $E+A$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$.

由于 A 是正定矩阵,故 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$,因此 $\lambda_1+1>1,\lambda_2+1>1,\cdots,\lambda_n+1>1$.

故 $|E+A|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$.

例 12 设 $D=\begin{pmatrix}A&C\\C^T&B\end{pmatrix}$ 为正定矩阵,其中 A,B 分别为 m 阶、n 阶对称矩阵,C 为 $m\times n$ 矩阵.

(1) 计算 P^TDP,其中 $P=\begin{bmatrix}E_m&-A^{-1}C\\O&E_n\end{bmatrix}$;

(2) 利用(1)的结果判断矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是否为正定矩阵,并证明你的结论.

分析：(2) 讨论抽象矩阵的正定性，一般用定义.

解：(1) 因为 $P^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}E_m & O\\ -C^{\mathrm{T}}A^{-1} & E_n\end{bmatrix}$，所以有

$$P^{\mathrm{T}}DP=\begin{bmatrix}E_m & O\\ -C^{\mathrm{T}}A^{-1} & E_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A & C\\ C^{\mathrm{T}} & B\end{pmatrix}\begin{bmatrix}E_m & -A^{-1}C\\ O & E_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C\end{pmatrix}\begin{bmatrix}E_m & -A^{-1}C\\ O & E_n\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C\end{pmatrix}$$

(2) 矩阵 $B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ 是正定矩阵.

由解(1)的结果可知，矩阵 D 合同于矩阵

$$M=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C\end{pmatrix}$$

又 D 为正定矩阵，可知矩阵 M 为正定矩阵.

因矩阵 M 为对称矩阵，故 $B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ 为对称矩阵. 对 $X=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 及任意的 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\neq 0$，有

$$(X^{\mathrm{T}},Y^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}A & O\\ O & B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=Y^{\mathrm{T}}(B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C)Y>0$$

故 $B-C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ 为正定矩阵.

例 13 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 已知矩阵 $B=\lambda E+A^{\mathrm{T}}A$，试证明：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵.

分析：根据正定矩阵的定义证明.

证：首先由 $B^{\mathrm{T}}=(\lambda E+A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}=\lambda E+A^{\mathrm{T}}A=B$ 知 B 是实对称矩阵，此外，对于任意非零实向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，有

$$X^{\mathrm{T}}BX=X^{\mathrm{T}}(\lambda E+A^{\mathrm{T}}A)X=\lambda X^{\mathrm{T}}X+(AX)^{\mathrm{T}}(AX)$$

由于 $X^{\mathrm{T}}X>0$，$(AX)^{\mathrm{T}}(AX)\geqslant 0$，$\lambda>0$，所以 $X^{\mathrm{T}}BX>0$. 故当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵.

题型 169* 与二次曲面相关的命题

思路启迪：须记住二次曲面的标准形式及其正负惯性指数. 设 p 为正惯性指数，q 为负惯性指数，则

(1) 球面方程 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$，$p=3$.

(2) 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$($a,b,c$ 均为正数)，$p=3$.

(3) 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$($a,b,c$ 均为正数)，$p=2,q=1$.

(4) 双叶双曲面 $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$($a,b,c$ 均为正数)，$p=1,q=2$.

(5) 二次锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$($a,b,c$ 均为正数)，$p=2,q=1$.

(6) 椭球柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$($a,b,c$ 均为正数)，$p=2$.

例 14　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程

$$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$$

在正交变换下的标准方程的图形如图 19－1 所示，则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D)3

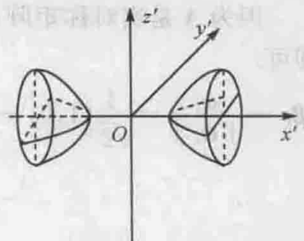


图 19－1

分析：由图 19－1 可看出此二次曲面为旋转双叶双曲面.

解：旋转双叶双曲面的标准形式为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$，正惯性指数为 1，所以 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为 1，故选(B).

例 15　已知二次曲面方程为 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$，可以通过正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\quad(\boldsymbol{Q}\text{ 是 3 阶正交矩阵})$$

化为椭柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$，求 a,b 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解：二次型 $f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

由题设可知，$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,1,4，所以有

$$\begin{cases}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=0+1+4\\|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{vmatrix}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}1+a+1=5\\\begin{vmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

解此方程得 $a=3,b=1$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

对应于 $\lambda=0$，解$(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

对应于 $\lambda=1$，解$(1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

对应于 $\lambda=4$，解$(4\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0})$可得属于特征值 $\lambda=4$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，不同特征值对应的特征向量是正交的，所以只需将它们单位化即可.

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$$

则所求的正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$.

第3篇* 概率论与数理统计题型

第20章 事件的概率

●重要定理、公式和结论

20.1 重要性质

1. 事件之间的关系与运算

(1) 事件的包含：若事件 A 发生必然会导致事件 B 发生，则称事件 B 包含 A，记为 $B\supset A$.

(2) 事件相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$，即 $A=B\Leftrightarrow A\subset B$，$B\subset A$.

(3) 事件 A 与 B 的并(或和)：$A+B$(或 $A\cup B$)，表示 A,B 至少有一个发生.

(4) 事件 A 与 B 的积(或交)：AB(或 $A\cap B$)，表示 A,B 同时发生.

(5) 事件 A 与 B 的差：$A-B$，表示 A 发生而 B 不发生.

(6) 互不相容(或互斥)事件：满足 $AB=\varnothing$ 的事件 A,B.

注：在一次试验中，基本事件都是两两互斥的.

(7) 对立事件：满足 $A+B=\Omega$，$AB=\varnothing$ 的事件 A,B，称 B 是 A 的逆事件 $\overline{A}$，A 是 B 的逆事件 $\overline{B}$，即 $\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$.

注：对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

(8) 事件的运算律：

① 交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$.

② 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$.

③ 分配律：$(A+B)C=AC+BC$，$A+BC=(A+B)(A+C)$.

④ 德·摩根律：$\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n$.

$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_n$.

注：$A-B=A\bar{B}$.

2. 概率的定义和性质

(1) 定义.

设 A 为随机事件，$P(A)$为定义在随机事件集合上的实函数，若满足：

① $P(\Omega)=1$；

② $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

③ 具有可列可加性. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$两两互斥，则有下式成立

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_k+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)+\cdots$$

称 $P(A)$为事件 A 发生的概率.

(2) 性质.

① $P(\varnothing)=0$；

② $P(\bar{A})=1-P(A)$；

③ 有限可加性. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则下式成立

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有下式成立

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1}$$

式(1)为概率的加法公式，常用的加法公式如下：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

20.2 常用结论

(1) $A+\varnothing=A$, $A+A=A(\neq 2A)$, $A+AB=A$;

$A\varnothing=\varnothing$, $AA=A$, $(A-B)+A=A\bar{B}+A=A$.

(2) $A=AB+A\bar{B}$, $B=AB+\bar{A}B$

$\Rightarrow P(A)=P(AB)+P(A\bar{B}),P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$.

注：$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$.（记住）

(3) $\overline{A+B}=\bar{A}\,\bar{B},\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B};P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)$; $P(\bar{A}+\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$.

(4) A,B 相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

●核心题型及思路启迪

20.3　古典概型和几何概型

题型170　古典概型的概率计算

思路启迪：首先确定是古典概型(注意各事件是否为等可能事件)，其次弄清样本空间和有利事件的结构，再利用古典概型概率计算公式进行计算.

$$P(A)=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

古典概型中概率的计算常需用到的基本结论：

(1) 排列(有序)

① 选排列(n个元素选m个排列)：$P_m^n=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{m!}$.

② 全排列：$P_n^n=n!$.

③ 有重复的排列：m个n相乘，即$n\cdot n\cdots n=n^m$.

(2) 组合　从n个中选m个的种数：$C_n^m=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}$.

(3) 加法原理　设完成一件事有n类方法(只要选择其中一类方法即可完成这件事)，若第1类方法有m_1种，第2类方法有m_2种，……，第n类方法有m_n种，则完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种方法.

(4) 乘法原理　设完成一件事有n个步骤(仅当n个步骤都完成才能完成这件事)，若第1步有m_1种方法，第2步有m_2种方法，……，第n步有m_n种方法，则完成这件事共有$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$种方法.

例1　一楼房共14层，设电梯在一层启动时有10名乘客，各乘客在各层下电梯是等可能的，试求下列事件的概率.

A_1="10个人在同一楼层下"；

A_2="10个人在不同楼层下"；

A_3="10个人恰有4个人在第8层下".

解：由题意可知，10个人等可能在13个楼层下电梯，可看作{2,3,…,14}这13个数做10次有放回抽样，因此基本事件总数为$n=13^{10}$.

有利于事件A_1的有13种，有利于事件A_2的有C_{13}^{10}种，有利于事件A_3的有$C_{10}^4\cdot 12^6$种，

故$P(A_1)=\frac{13}{13^{10}}=\frac{1}{13^9}$，$P(A_2)=\frac{C_{13}^{10}}{13^{10}}$，$P(A_3)=\frac{C_{10}^4\cdot 12^6}{13^{10}}$.

例 2 二阶行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的元素可能为 0 或 1，而 0 与 1 出现的概率均为$\frac{1}{2}$，求该行列式的值为正数的概率.

解： 由题意可知，基本事件总数为 2^4. 若$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc>0$，则 $ad=1, bc=0$.

符合上述情况的行列式有：$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

故 $P\{$该二阶行列式的值为正数$\}=\frac{3}{2^4}$.

例 3 从 1，2，…，10 共 10 个数中，每次取一个数，且每个数被抽到的可能性相等，取后放回. 先后取出 7 个数，试求下列各事件的概率.

A_1="7 个数中不含 1 和 10"；A_2="数 10 恰好出现两次".

解： 由题意可知，数字可被重复取，所以基本事件总数为 10^7.

有利于事件 A_1 的有 8^7 种，有利于事件 A_2 的有 $C_7^2 \cdot 9^5$ 种.

故 $P(A_1)=\frac{8^7}{10^7}, P(A_2)=\frac{C_7^2 \cdot 9^5}{10^7}$.

题型 171 几何概型的概率计算

思路启迪： 如果随机试验 E 的样本空间 Ω 为欧式空间中的一个区域，且每个样本点的出现具有等可能性，则称此试验为几何概型. 对于几何概型，事件 A 的概率有下列计算公式：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量(长度，面积，体积)}}{\Omega\text{ 的度量(长度，面积，体积)}}$$

例 4 从(0，1)中随机地取两个数 x 和 y，则满足条件的 $xy<\frac{1}{4}$ 的概率是________.

解： 显然本题为几何概型，如图 20-1 所示. 则

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1, 0<y<1\} \qquad A=\left\{(x,y)\,\middle|\, xy<\frac{1}{4}, (x,y)\in\Omega\right\}$$

于是 $S_\Omega=1, S_A=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$，故所求概率为 $p=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

例 5 在长度为 a 的线段内任取两点将其分成三段，求它们可以构成一个三角形的概率.

解： 设线段被分成的三段，分别为 x, y 和 $a-x-y$，则样本空间为由 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 及 $x+y\leqslant a$ 所构成的图形，其面积为 $S_{\triangle AOB}$，有利事件 A(即 $x, y, a-x-y$ 三段构成三角形)的基本事件集：由线段 $x, y, a-x-y$ 所围成的三角形，其面积记为 $S_{\triangle DCE}$，如图 20-2 所示.

依据三角形两边之和大于第三边的性质，有

$$0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2} \qquad 0\leqslant y\leqslant\frac{a}{2} \qquad \frac{a}{2}\leqslant x+y\leqslant a$$

则其面积 $S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{8}$，于是由几何概型的概率计算公式有

$$P(A)=\frac{a^2/8}{a^2/2}=\frac{1}{4}$$

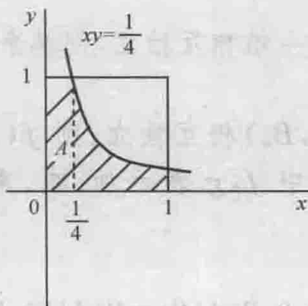


图 20-1

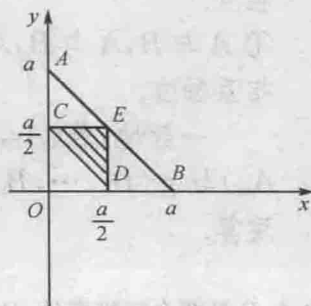


图 20-2

20.4　概率的概念、性质及计算

题型 172　有关事件的独立性的命题

思路启迪：(1) 两个事件的独立性　设 A,B 是两个随机事件，若有等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立.

(2) n 个事件的独立性　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个随机事件，如果对于任意 $k(i_k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，以下等式成立

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件；如果其中任意两个是相互独立的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两独立的事件.

例如：A,B,C 相互独立$\Leftrightarrow\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C).\end{cases}$

注：① 相互独立$\Rightarrow$两两独立，但两两独立$\nRightarrow$相互独立；

② 当 $0<P(B)<1$ 时，

A,B 相互独立$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$，即事件 B 的发生不影响事件 A 发生的概率.

$$\Leftrightarrow\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\overline{B})$$

③ A,B 相互独立$\not\Rightarrow A,B$ 互不相容；且 A,B 互不相容$\not\Rightarrow A,B$ 相互独立.

④ A 与 B，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一组相互独立，则其余三组也相互独立.

一般地，若$(A_1,\cdots,A_m)$与$(B_1,\cdots,B_n)$相互独立，则 $f(A_1,\cdots,A_m)$与 $g(B_1,\cdots,B_n)$也相互独立. 其中 f,g 表示加、减、乘，对立运算.

例 6 已知 A,B 是两个随机事件，$P(A)=0.4$，$P(AB)=0.2$，$P(A|\overline{B})=P(A|B)$，则 $P(A+B)=$________.

解： 由 $P(A|\overline{B})=P(A|B)$可得 A,B 相互独立，所以 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.5$，故

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.5-0.2=0.7$$

例 7 已知 A,B 相互独立，$P(\overline{A}\,\overline{B})=\dfrac{1}{9}$，$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，则 $P(A)=$________.

解： 因为 A,B 相互独立，所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9}\Rightarrow[1-P(A)][1-P(B)]=\frac{1}{9} \tag{1}$$

$$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)\Rightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Rightarrow P(A)=P(B) \tag{2}$$

由式(1)，(2)联立可得 $P(A)=\dfrac{2}{3}$.

例 8 已知 $P(A)=0.4$，$P(C)=0.5$，$A\subset B$，A,C 独立，$P(A-C|AB+C)=$________.

解： 因为 $A\subset B$，所以 $AB=A$.

$$\begin{aligned}P(A-C|AB+C)&=P(A-C|A+C)\\&=\frac{P[(A-C)(A+C)]}{P(A+C)}=\frac{P(A-C)}{P(A+C)}\\&=\frac{P(A)-P(AC)}{P(A)+P(C)-P(AC)}=\frac{P(A)-P(A)P(C)}{P(A)+P(C)-P(A)P(C)}\\&=\frac{0.4-0.4\times0.5}{0.4+0.5-0.4\times0.5}=\frac{2}{7}\end{aligned}$$

例 9 设 A,B,C 三个事件两两独立，则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是(　　).

(A) A 与 BC 独立　　(B) AB 与 $A+C$ 独立

(C) AB 与 AC 独立　　(D) $A+B$ 与 $A+C$ 独立

分析： 在 A,B,C 两两独立的条件下，A,B,C 相互独立的充分必要条件是

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

据此，逐个检验选项，直到得到正确选项为止.

解： 对选项(A)，在 A,B,C 两两独立的条件下，

(1) 如果 A 与 BC 独立，则 $P(ABC)=P[A(BC)]=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$；

(2) 如果 A,B,C 相互独立，则 $P[A(BC)]=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)$.

故本题选(A).

例 10　设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件,且 $0<P(C)<1$,则下列给定的四对事件中不相互独立的是(　　).

(A) $\overline{A+B}$与C　　(B) $\overline{AC}$与C

(C) $\overline{A-B}$与C　　(D) $\overline{AB}$与C

解: 因为 A,B,C 相互独立,则 A,B 与 C 相互独立,所以 $f(A,B)$ 与 $g(C)$ 相互独立,则(A),(C),(D)中的事件相互独立,故选(B).

题型 173　利用逆事件概率公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 计算概率

思路启迪: 当逆事件概率容易计算时,利用 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

例 11　从 0,1,2,…,9 等十个数字中任意选出三个不同的数字,则三个数字中不含"0"或"5"的概率为________.

解: 令 $A=$"三个数字不含 0 或 5",$B=$"三个数字不含 0",$C=$"三个数字不含 5",则

$$A=B+C$$

故所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B+C})=1-P(\overline{B}\,\overline{C})=1-\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

例 12　设 A,B 是两个随机事件,$P(A)=0.7$,$P(A-B)=0.3$,求 $P(\overline{AB})$.

解: $P(A-B)=P(A)-P(AB)$,得 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4$,故

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

例 13　从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,求此 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率.

解: 设 A 表示"至少有两只鞋子配成一双",于是 $\overline{A}$ 表示"没有成双的鞋子",故基本事件总数为 C_{10}^4,有利于 $\overline{A}$ 的基本事件数为 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$,于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

例 14　有 9 位乘客来到某 13 层大楼的一层乘电梯上楼,每个乘客在任一层(从第 2 层到第 13 层)离开是等可能的,求至少有 2 位乘客在同一层离开的概率.

解: 记 $A_i=\{$有 i 位乘客在同一层离开$\}(i=1,2,\cdots,9)$,则

$$\{\text{至少有 2 位乘客在同一层离开}\}=A_2+A_3+\cdots+A_9$$

于是由逆概公式可得

$$\begin{aligned}P(A_2+A_3+\cdots+A_9)&=1-P(\overline{A_2+A_3+\cdots+A_9})\\&=1-P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\cdots P(\overline{A_9})\\&=1-P(A_1)\\&=1-\frac{P_{12}^9}{10^9}\approx 0.92\end{aligned}$$

题型 174　利用加法公式、乘法公式和条件概率公式计算概率

思路启迪: (1) 加法公式

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

常用以下两个公式：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

适用于：计算若干个事件中至少有一个发生的问题.

(2) 乘法公式　设 $P(A)>0,P(B)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$.

一般地，设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

适用于：凡涉及 A,B 同时发生的用 $P(AB)$，计算积事件概率 $P(AB)$ 的样本空间为 Ω.

(3) 条件概率　设 A,B 是两个随机事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率.

注：条件概率仍具有概率的性质.

① $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$；

② $P(A_1+A_2|A)=P(A_1|A)+P(A_2|A)-P(A_1A_2|A)$.

适用于：凡有“包含”关系、“先后”关系、“主次”关系的用 $P(B|A)$，计算 $P(B|A)$ 时的样本空间为 Ω_A.

例 15　甲乙两射手进行射击，甲击中目标的概率为 0.9，乙击中目标的概率为 0.7，甲、乙两人同时击中目标的概率为 0.65，求目标被击中的概率.

解：“目标被击中”等价于“二人中至少有一人击中目标”，

设 $A=\{$甲击中目标$\}$，$B=\{$乙击中目标$\}$，$C=\{$目标被击中$\}$. 则

$$P(A)=0.9\quad P(B)=0.7\quad P(AB)=0.65$$

故 $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9+0.7-0.65=0.95$.

例 16　某班有 n 个战士，每人各有 1 支枪，这些枪外形完全一样，在一次夜间的紧急集合中，若每人随机地取走一支枪，求至少有 1 个人拿到自己的枪的概率是多少？

解：记 $A_i=\{$第 i 个战士拿到自己的枪$\}(i=1,2,\cdots,n)$，则所求的概率为

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)$$

由于 $P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$ 不易计算，所以用加法公式直接计算

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)$$

并且
$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$
$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}\quad(1\leqslant i<j\leqslant n)$$
$$P(A_iA_jA_k)=\frac{(n-3)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\quad(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$$
$$\vdots$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{(n-n)!}{n!}=\frac{1}{n!}$$

所以
$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$=n\times\frac{1}{n}-C_n^2\frac{1}{n(n-1)}+C_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$
$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

例 17　设某人的眼镜第一次落地打破的概率为$\frac{3}{10}$，第二次落地打破的概率为$\frac{4}{10}$，第三次落地打破的概率为$\frac{9}{10}$，求眼镜落地三次被打破的概率.

解：设A="眼镜落地三次被打破"，A_i="眼镜第 i 次落地被打破"（$i=1,2,3$）. 则 $A=A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3$，且 $A_1,\overline{A_1}A_2,\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3$ 互斥. 故
$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3)$$
$$=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\ \overline{A_2})$$
$$=\frac{3}{10}+\left(1-\frac{3}{10}\right)\times\frac{4}{10}+\left(1-\frac{3}{10}\right)\times\left(1-\frac{4}{10}\right)\times\frac{9}{10}=0.958$$

例 18　为了防止意外事故，在矿井内同时安装两种警报系统 A 与 B，每种系统单独使用时，其有效概率 A 为 0.92，B 为 0.93. 在 A 失灵条件下，B 有效的概率为 0.85. 求：

(1) 发生意外时，这两种警报系统至少有一个有效的概率.

(2) 在 B 失灵条件下，A 有效的概率.

解：A"表示发生意外时警报 A 有效"，B"表示发生意外时警报 B 有效".

由题意可知，$P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，$P(B|\overline{A})=0.85$.

(1)
$$P(A+B)=1-P(\overline{A+B})$$
$$=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})$$
$$=1-[1-P(A)][1-P(B|\overline{A})]$$
$$=1-0.08\times0.15=0.988$$

(2)
$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}$$
$$=\frac{P(A)-[P(A)+P(B)-P(A+B)]}{P(\overline{B})}$$

$$=\frac{P(A+B)-P(B)}{P(\overline{B})}=\frac{0.988-0.93}{0.07}=\frac{29}{35}$$

题型 175 利用事件的独立性和伯努利概型计算概率

思路启迪：如果试验 E 的结果只有两个：A 与 $\overline{A}$，则称此试验为伯努利概型(试验)．若将伯努利试验独立重复 n 次，则称为 n 重伯努利概型，简称伯努利概型．若 $P(A)=p$，则 n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

例 19 设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 p，现进行 n 次独立试验，试求：

(1) A 至少发生一次的概率；

(2) A 至多发生一次的概率．

解：由题意可知 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p$．设事件 $B_1=\{A$ 至少发生一次$\}$，$B_2=\{A$ 至多发生一次$\}$，则

(1) $P(B_1)=1-P(\overline{B}_1)=1-P_n(0)=1-C_n^0p^0(1-p)^n=1-(1-p)^n$

(2) $P(B_2)=P_n(0)+P_n(1)$

$$=C_n^0p^0(1-p)^n+C_n^1p^1(1-p)^{n-1}$$
$$=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$$

例 20 一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $p_i=\frac{1}{i+1}(i=1,2,3)$，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，求 $P\{X=2\}$．

解：$\{X=2\}=\{$3 个零件中有 2 个为合格品，1 个为不合格品$\}$．

设 $A_i=\{$第 i 个零件是合格品$\}$，由已知得 $P(A_i)=1-\frac{1}{1+i}=\frac{i}{1+i}$，$i=1,2,3$，则

$$\begin{aligned}P\{X=2\}&=P\{A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3\}\\&=P\{A_1A_2\overline{A}_3\}+P\{A_1\overline{A}_2A_3\}+P\{\overline{A}_1A_2A_3\}\\&=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)\\&=\frac{1}{1+1}\cdot\frac{2}{1+2}\cdot\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{1+2}\cdot\frac{3}{1+3}+\frac{1}{1+1}\cdot\frac{2}{1+2}\cdot\frac{3}{1+3}=\frac{11}{24}\end{aligned}$$

例 21 假设一厂家生产的每台仪器以概率 0.7 可直接出厂；以概率 0.3 需进一步调试，经调试后以概率 0.8 可以出厂；以概率 0.2 定为不合格品，不能出厂．现该厂新生产了 $n(n\geqslant 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立)．求：

(1) 全部能出厂的概率 α；

(2) 其中恰好有两台不能出厂的概率 β；

(3) 其中至少有两台不能出厂的概率 θ．

解：(1) 对于新生产的每台仪器，A 表示“仪器需进一步调试”，B 表示“仪器能出厂”，$\overline{A}$ 表示“仪器能直接出厂”，AB 表示“仪器需进一步调试且能出厂”，于是

$$B=\overline{A}+AB\qquad P(A)=0.3\qquad P(B\mid A)=0.8$$

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.3\times 0.8=0.24$$

$$P(B)=P(\overline{A}+AB)=P(\overline{A})+P(AB)=0.7+0.24=0.94$$

设 X 为所生产的 n 台仪器中能出厂的台数，则 X 作为 n 次独立试验成功（仪器能出厂）的次数，于是 X 服从参数 $p=0.94$ 的 n 重伯努利概型，故

$$\alpha=P\{X=n\}=C_n^n(0.94)^n(1-0.94)^0=(0.94)^n$$

(2) $\beta=P\{X=n-2\}=C_n^2(0.94)^{n-2}(1-0.94)^2=0.0018n(n-1)(0.94)^{n-2}$

(3) $\theta=P\{X\leqslant n-2\}=1-P\{X=n-1\}-P\{X=n\}$

$=1-0.06n(0.94)^{n-1}-(0.94)^n$.

题型 176 利用全概率公式与贝叶斯公式计算概率

思路启迪： 如果把 $B_1,\cdots,B_n$ 看成是导致事件 A 发生的原因，那么全概率公式与贝叶斯公式可以分别说成“由因求果”与“由果索因”的概率计算公式.

如果所求的概率可以分解成两步，两步彼此关联，第一步的各种结果直接影响第二步的结果的发生，且第一步有多种情况发生（即能够找到完备事件组 $B_1,\cdots,B_n$），若第二步为所求的事件 A 的概率，则利用全概率公式计算；若已知事件 A 的概率，要求导致该事件发生的原因 B_i 的可能性大小，即条件概率 $P(B_i|A)$，则用贝叶斯公式求解.

(1) 全概率公式

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一完备事件组，即两两互斥，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，此外，$P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

(2) 贝叶斯(Bayes)公式

若 $B_1,\cdots,B_n$ 为一完备事件组，$P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n,P(A)>0$，则有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

例 22 已知 10 个灯泡中已损坏的个数是 0,1,2,3，且它们是等可能的. 现从这 10 个灯泡中有放回地连续取三次，每次取 1 个，求取出的 3 个灯泡中恰有 2 个未损坏的概率.

解：“从 10 个灯泡中有放回地取三次”可以看作 3 重独立重复试验，每次取一个灯泡，只有两个可能结果：$A=\{$任取的一个灯泡是未损坏的$\}$和 $\overline{A}$.

记 $B_i=\{10$ 个灯泡中已损坏的有 i 个$\}(i=0,1,2,3)$，则由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A\mid B_i)P(B_i)$$

其中 $$P(B_0)=P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{4}$$

$$P(A\mid B_0)=1\quad P(A\mid B_1)=\frac{9}{10}\quad P(A\mid B_2)=\frac{8}{10}\quad P(A\mid B_3)=\frac{7}{10}$$

所以有 $P(A)=\sum\limits_{i=0}^{3}P(A\mid B_i)P(B_i)=\frac{17}{20}$.

P\{取出的 3 个灯泡中恰有 2 个未损坏\}$=C_3^2[P(A)]^2[1-P(A)]=0.325$

例 23 在电源电压不超过 200 V、200～240 V、超过 240 V 三种情况下，某电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001，0.2. 假设电源电压 $X\sim N(220,25^2)$. 试求：

(1) 该电子元件损坏的概率；

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 200～240 V 的概率.（已知 $\Phi(0.8)=0.788$）

解：设 A_1,A_2,A_3 分别表示电源电压"不超过 200 V"、"200～240 V"、"超过 240 V".

B 表示"元件损坏"，由于 $X\sim N(220,25^2)$，所以

$$P(A_1)=P\{X\leqslant 200\}=P\left\{\frac{X-220}{25}\leqslant\frac{200-220}{25}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-220}{25}\leqslant -0.8\right\}=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=0.212$$

$$P(A_2)=P\{200\leqslant X\leqslant 240\}=P\left\{\frac{200-220}{25}\leqslant\frac{X-220}{25}\leqslant\frac{240-220}{25}\right\}$$

$$=P\left\{-0.8\leqslant\frac{X-220}{25}\leqslant 0.8\right\}=2\Phi(0.8)-1=0.576$$

$$P(A_3)=P\{X>240\}=1-P(A_1)-P(A_2)=0.212$$

又 $$P(B|A_1)=0.1\qquad P(B|A_2)=0.001\qquad P(B|A_3)=0.2$$

(1) 由全概率公式 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(B\mid A_i)P(A_i)=0.064$.

(2) $P(A_2|B)=\dfrac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.576\times 0.001}{0.064}=0.009$.

例 24 12 个乒乓球中有 9 个新球，3 个旧球. 第一次比赛时，从中任取 3 个球，用完后放回去（新球使用后成为旧球），第二次比赛时，又从中任意取出 3 个球，已知第二次取出的 3 个球中有两个是新球，求第一次取出的 3 个球中恰有一个新球的概率.

分析：本题分两步进行. 第一步为第一次比赛时，从中任取 3 个球；第二步为第二次比赛时，又从中任意取出 3 个球，已知第二步的结果为第二次取出的 3 个球中有 2 个是新球，求与结果相关的某一原因（第一次取出的 3 个球中恰有一个新球）的概率，用贝叶斯公式计算.

解：记 $B=$\{第二次取出的 3 个球中有 2 个是新球\}

$A_i=$\{第一次取出的 3 个球中有 i 个新球\} $\quad(i=0,1,2,3)$

则所求的概率为 $P(A_1|B)$. 由于 A_1 先于 B 发生，所以由贝叶斯公式可得

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_1)P(A_1)}{\sum\limits_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)}$$

其中　$P(A_0)=\frac{C_9^0C_3^3}{C_{12}^3}$　$P(A_1)=\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}$　$P(A_2)=\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}$　$P(A_3)=\frac{C_9^3C_3^0}{C_{12}^3}$

且

$$P(B \mid A_0)=\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}$$

$$P(B \mid A_1)=\frac{C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}$$

$$P(B \mid A_2)=\frac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}$$

$$P(B \mid A_3)=\frac{C_6^2C_6^1}{C_{12}^3}$$

所以

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B \mid A_i)}\approx 0.14$$

例 25　要验收一批(20 台)微机. 验收方案:从中任取 3 台,分别进行独立测试,如果 3 台中至少有一台是次品,则拒绝接收这批微机. 由于测试技术和水平,一台次品被误测为正品的概率为 0.95,而一台正品被误测为次品的概率为 0.01. 如果这批微机中有 4 台次品,试问这批微机被接收的概率是多少?

解: 记 $A=\{$这批微机被接收$\}$,则它与下列的完备事件组有关:

$$H_i=\{\text{任取的 3 台微机中恰有 } i \text{ 件次品}\}\quad (i=0,1,2,3)$$

于是,由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A \mid H_i)P(H_i)$$

其中

$$P(H_0)=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}$$

$$P(H_1)=\frac{C_4^1C_{16}^2}{C_{20}^3}$$

$$P(H_2)=\frac{C_4^2C_{16}^1}{C_{20}^3}$$

$$P(H_3)=\frac{C_4^3}{C_{20}^3}$$

$$P(A \mid H_0)=0.99^3$$

$$P(A \mid H_1)=0.99^2\times 0.05$$

$$P(A \mid H_2)=0.99\times 0.05^2$$

$$P(A \mid H_3)=0.05^3$$

所以

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A \mid H_i)P(H_i)=0.503\ 1$$

例 26　已知 100 件产品中有 10 件正品,每次使用这些正品时肯定不会发生故障,而在每次使用非正品时均有 0.1 的可能发生故障,现从这 100 件产品中随机抽取一件,若使用了 n 次均未发生故障,问 n 为多大时,才能有 70%的把握认为所取的产品为正品?

解: 设 B_1="正品", B_2="非正品", A="使用了 n 次均未发生故障".

由
$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}$$
$$=\frac{0.1\times1}{0.1\times1+0.9\times0.9^n}\geqslant0.7$$

可推得 $n\geqslant29$,即 n 为 29 时,才能有 70%的把握认为所取的产品为正品.

例 27 已知每天登录某网站的人数服从参数为 λ 的泊松分布,而登录网站的人以概率 p 打开某网页,且每个人是否打开该网页是相互独立的,试求恰有 k 个人打开此网页的概率.

解: 设 X="登录网站的人数", Y="打开网页的人数",则
$$P(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$
$$P(Y=k\mid X=n)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\qquad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

于是
$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X=n)P(Y=k\mid X=n)$$
$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=\frac{p^k\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(\lambda p)^ke^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}$$
$$=\frac{(\lambda p)^ke^{-\lambda}}{k!}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^ke^{-\lambda p}}{k!}$$

即 Y 服从参数为 λp 的泊松分布.

第 21 章　随机变量及其分布

● 重要定理、公式和结论

21.1　重要定理和结论

1. 泊松定理

当 p 较小、n 较大时，令 $\lambda=np$，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

2. 二项定理

若当 $N\to\infty$ 时，$\frac{M}{N}\to p$，则

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\to C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

3. 有关正态分布的结论

(1) 形式：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，概率密度 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<+\infty)$.

(2) 标准化：$U=\frac{x-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，概率密度为

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\quad(-\infty<u<+\infty)$$

分布函数为

$$\Phi(u)=\int_{-\infty}^{u}\varphi(t)dt\quad(-\infty<u<+\infty)$$

① $P(U\leqslant -x)=P(U>x)=1-P(U\leqslant x)$，即 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$；

② $P(|U|\leqslant x)=2P(U\leqslant x)-1=2\Phi(x)-1$.

● 核心题型及思路启迪

21.2　一维随机变量及其分布

题型 177　与一维随机变量概念和性质相关的命题

思路启迪： 要熟记分布函数、分布律和分布密度的概念和性质.

(1) 分布函数 $F(x)$ 中待定常数的确定一般利用 $F(x)$ 的性质及定义：

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},\quad \lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}F(x)=1,\quad F(x+0)=F(x)$$

其中,$F(x)$是右连续函数,特别当 X 是连续型随机变量时,$F(x)$是连续函数.

(2) 离散型随机变量的分布律有 $P\{X=k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}=1$.

(3) 连续型随机变量的概率密度 $f(x)$有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

例 1 设 $F_1(x)$,$F_2(x)$分别是随机变量 X_1,X_2 的分布函数,$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$,要使 $F(x)$也为分布函数,则有(　　).

(A) $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　　(B) $a=-\frac{2}{5},b=\frac{3}{5}$

(C) $a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$　　(D) $a=-\frac{2}{3},b=-\frac{1}{3}$

解:
$$F(+\infty)=aF_1(+\infty)-bF_2(+\infty)=a-b=1$$

将(A),(B),(C),(D)分别代入,可知应选(A).

例 2 设 X_1,X_2 是相互独立的连续型随机变量,其概率密度分别为 $f_1(x)$,$f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$,$F_2(x)$,则(　　).

(A) $f_1(x)+f_2(x)$必为概率密度　　(B) $f_1(x)f_2(x)$必为概率密度

(C) $F_1(x)+F_2(x)$必为分布函数　　(D) $F_1(x)F_2(x)$必为分布函数

解: 对于(A),$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=2\neq 1$.

对于(B),设 X_1,X_2 分别在$[0,1]$,$[2,3]$上服从均匀分布,则

$$f_1(x)f_2(x)\equiv 0\quad(-\infty<x<+\infty)$$

显然它不是概率密度.

对于(C),$F(+\infty)=F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2\neq 1$,故由排除法可知应选(D).

注: 事实上,对于(D),$F(x)=F_1(x)F_2(x)$,因为

① $0\leqslant F(x)\leqslant 1$,$F(-\infty)=0$,$F(+\infty)=1$;

② $F(x)$单调不减;

③ $F(x)$右连续,即 $F(x+0)=F(x)$.

所以 $F(x)$为某随机变量的分布函数.

例 3 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,且对任意实数 x,有 $f(-x)=f(x)$,设 $F(x)$是 X 的分布函数,则对任意的实数 a,有(　　).

(A) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

(C) $F(-a)=F(a)$　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$

解: 由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$可得 $2\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$,而 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,所以

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(t)\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=-t}\int_{+\infty}^{a} f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

故选(B).

例 4　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，分布函数为 $F(x)$，则对任意的 x，有(　　).

(A) $F(x+\mu)=F(x-\mu)$　　(B) $F(\mu+x)=F(\mu-x)$

(C) $F(x+\mu)+F(x-\mu)=1$　　(D) $F(\mu+x)+F(\mu-x)=1$

解：X 的概率密度 $y=f(x)$ 的图形如图 21-1 所示. 则

$$P(X\leqslant\mu-x)=P(X>\mu+x)=1-P(X\leqslant\mu+x)$$

即 $F(\mu+x)=1-F(\mu-x)$，亦即 $F(\mu+x)+F(\mu-x)=1$.

故选(D).

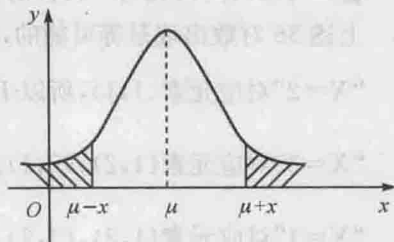


图 21-1

注：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则要想到正态分布概率密度的图形或将其标准化.

例 5　设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$$

则必有(　　).

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1<\mu_2$　　(D) $\mu_1>\mu_2$

解：由题设可得

$$P\left\{\frac{|X-\mu_1|}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\frac{|Y-\mu_2|}{\sigma_2}<\frac{1}{\sigma_2}\right\}$$

则
$$2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1>2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1$$

即
$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数.

又 $\Phi(x)$ 是单调增加函数，则 $\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}$，即 $\sigma_1<\sigma_2$.

故选(A).

题型 178　求离散型随机变量的分布律或分布函数

思路启迪：(1) 求分布律须首先确定随机变量的所有可能取值，然后求出对应于各可能取值的事件的概率，最后验证 $\sum P(X=x_k)=1$ 是否成立.

(2) 已知分布律，求分布函数，则直接利用定义

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_k\leqslant x}P(X=x_k)$$

注意正确划分 x 的取值区间并求出相应的概率(按累计法计算),其图形是右连续的阶梯形曲线.

(3) 已知分布函数 $F(x)$,求分布律,则 $F(x)$ 的间断点 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ 即为 X 可能的取值,且 $P(X=x_k)=F(x_k)-F(x_k-0)$.

例 6 将一枚骰子连掷两次,以 X 表示两次所得的点数之和,试写出 X 的分布律.

解: 样本空间

$\Omega=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6);(2,1),(2,2),\cdots,(2,6);\cdots;(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\}$

上述 36 对数出现是等可能的,所以 X 的可能取值为 $2,3,\cdots,12$,则有

"$X=2$"对应元素(1,1),所以 $P\{X=2\}=\frac{1}{36}$.

"$X=3$"对应元素(1,2),(2,1),所以 $P\{X=3\}=\frac{2}{36}$.

"$X=4$"对应元素(1,3),(2,2),(3,1),所以 $P\{X=4\}=\frac{3}{36}$.

…

于是 X 的分布律如表 21-1 所列.

表 21-1

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

例 7 甲、乙两人从装有 a 个白球与 b 个黑球的口袋中轮流摸取一球,甲先取,乙后取,每次取后不放回,直到两人中有 1 人取到白球时停止. 试求取球次数的分布律.

分析: 根据试验要求,取球次数为随机变量,其可能取值为 $1,2,\cdots,b+1$.

解: 令 X 表示取球次数,则 X 的可能取值为 $1,2,\cdots,b+1$,并且分布律为

$$P(X=1)=\frac{a}{a+b}$$

$$P(X=2)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}$$

$$\vdots$$

$$P(X=k)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}\cdots\frac{b-(k-2)}{a+b-(k-2)}\cdot\frac{a}{a+b-(k-1)}$$

$$\vdots$$

$$P(X=b+1)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}\cdots\frac{b-(k-2)}{a+b-(k-2)}\cdots\frac{a}{a}$$

$$=\frac{ab!}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+1)a}=\frac{b!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}$$

例 8 对某一目标射击,直到击中目标为止,如果每次射击的命中概率为 p,求射击次数的概率分布.

解：设 X 为射击次数，则 X 服从几何分布，故

$$P\{X=k\}=p\cdot(1-p)^{k-1}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

例 9　从 $\Omega=\{1,2\cdots,N\}$ 中随意取 4 个数，以 X 表示其中最小者，试求 X 的概率分布.

解：随机变量 X 有 $k=1,2,\cdots,N-3$ 等 $N-3$ 个可能值. 自 $\Omega=\{1,2,\cdots,N\}$ 中随意取 4 个数共有 C_N^4 种不同的取法，其中有利于事件 $\{X=k\}$ 的有 C_{N-k}^3 种. 于是

$$P\{X=k\}=\frac{C_{N-k}^3}{C_N^4}\qquad(k=1,2,\cdots,N-3)$$

题型 179　求连续型随机变量的概率密度或分布函数

思路启迪：(1) 已知分布函数 $F(x)$，求概率密度，对 $F(x)$ 求导即可，即 $f(x)=F'(x)$. 若 $F(x)$ 是分段函数，则 $f(x)$ 在分段点处的值可以取为该段的 $f(x)$ 的值.

(2) 已知概率密度 $f(x)$，求分布函数 $F(x)$，只要将 $F(x)$ 写成 $f(x)$ 的变上限积分即可，即 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

例 10　设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a, & x<1\\ bx\ln x+cx+d, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\\ d, & x>\mathrm{e}\end{cases}$$

试求：(1) 常数 a,b,c,d；(2) X 的概率密度 $f(x)$.

解：(1) 由 X 的连续性，有

$$\begin{cases}F(-\infty)=0\\ \lim\limits_{x\to1^+}F(x)=F(1)\\ \lim\limits_{x\to \mathrm{e}^+}F(x)=F(\mathrm{e})\\ F(+\infty)=1\end{cases},\quad 即\begin{cases}a=0\\ a=c+d\\ d=b\mathrm{e}+c\mathrm{e}+d\\ d=1\end{cases}$$

所以 $a=0,b=1,c=-1,d=1$. 于是

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x\ln x-x+1, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\\ 1, & x>\mathrm{e}\end{cases}$$

(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\ln x, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\\ 0, & 其他\end{cases}$.

例 11　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ax, & 1<x<2\\ B, & 2\leqslant x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

且 $P\{1<X<2\}=P\{2<X<3\}$. 试求：(1) 常数 A,B；(2) X 的分布函数.

解：(1) 由

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \\ P\{1 < X < 2\} = P\{2 < X < 3\}\end{cases}, \quad \text{即} \begin{cases}\int_1^2 Ax\mathrm{d}x + \int_2^3 B\mathrm{d}x = 1 \\ \int_1^2 Ax\mathrm{d}x = \int_2^3 B\mathrm{d}x\end{cases}$$

于是$\int_1^2 Ax\mathrm{d}x = \int_2^3 B\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$,即$\frac{3}{2}A = B = \frac{1}{2}$,所以$A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{2}$.

(2) 由(1)可得

$$f(x) = \begin{cases}\frac{1}{3}x, & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}, & 2 \leqslant x < 3 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

利用公式$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$计算$F(x)$.

当$x \leqslant 1$时,$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

当$1 < x < 2$时,$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{3}t\mathrm{d}t = \frac{1}{6}(x^2 - 1)$.

当$2 \leqslant x < 3$时,$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{3}t\mathrm{d}t + \int_2^x \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

当$x \geqslant 3$时,$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

因此

$$F(x) = \begin{cases}0, & x \leqslant 1 \\ \frac{1}{6}(x^2 - 1), & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & 2 \leqslant x < 3 \\ 1, & x \geqslant 3\end{cases}$$

题型 180　由已知分布求概率或由已知概率求分布

思路启迪: (1) 已知分布律,求概率的程序是:

① 写出随机变量所满足的区间中的所有可能值;

② 将以上值的概率累加即得.

(2) 已知分布密度$f(x)$,求概率的程序是:

① 写出随机变量所满足的区间$[a,b]$;

② 计算$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即为所求概率.

(3) 已知分布函数$F(x)$,求概率的程序是:

① 若是离散型,则利用$P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$;

② 若是连续型,则$P\{a<X<b\}=F(b)-F(a)$.

注： ① 当随机变量 X 在 $[a,b]$ 上随机取值或 X 在 $[a,b]$ 上取值的概率与 $[a,b]$ 的长度成正比时，要想到 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，即 $X\sim U[a,b]$；

② 当已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，要想到将 X 标准化，即 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

例 12　已知 X 是在区间 $(0,1)$ 内取值的连续型随机变量，且 $P\{X\leqslant 0.29\}=0.75$，$P\{Y\leqslant a\}=0.25$，其中 $Y=1-X$，求未知常数 a.

解： 因为

$$0.25=P\{Y\leqslant a\}=P\{1-X\leqslant a\}=P\{X\geqslant 1-a\}=1-P\{X<1-a\}$$

所以 $P\{X<1-a\}=0.75$，又 $P\{X\leqslant 0.29\}=0.75$，故 $1-a=0.29$，即 $a=0.71$.

例 13　已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，求概率 $P(Y=2)$.

解：

$$p=P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

于是 $Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{4}\right)$. 所以

$$P(Y=2)=\mathrm{C}_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{64}$$

例 14　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\dfrac{1}{2}$，求 μ.

解： 由题设知，$y^2+4y+X=0$ 无实根，则 $\Delta^2=4^2-4X<0$，于是

$$\frac{1}{2}=P(4^2-4X<0)=P(X>4)$$

又 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则由正态分布的性质可知 $\mu=4$.

注： 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{X\leqslant\mu\}=P\{X>\mu\}=\dfrac{1}{2}$.

例 15　测量到某一目标的距离时产生的随机误差 X(单位:m)的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-20)^2}{3\,200}},\quad -\infty<x<+\infty$$

求在 3 次测量中至少有一次误差的绝对值不超过 30 m 的概率.

解： 记 Y 为 3 次测量中误差的绝对值不超过 30 m 的次数，则 $Y\sim B(3,p)$，于是所求的概率为

$$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-p)^3$$

由于 $X\sim N(20,40^2)$，则 $\dfrac{X-20}{40}\sim N(0,1)$，所以

$$\begin{aligned}p&=P\{|X|\leqslant 30\}=P\{-30\leqslant X\leqslant 30\}\\&=P\left\{\frac{-30-20}{40}\leqslant\frac{X-20}{40}\leqslant\frac{30-20}{40}\right\}=P\left\{-1.25\leqslant\frac{X-20}{40}\leqslant 0.25\right\}\\&=\Phi(0.25)-\Phi(-1.25)=\Phi(0.25)+\Phi(1.25)-1=0.493\,1\end{aligned}$$

于是 $P\{Y\geqslant 1\}=1-(1-0.4931)^3=0.8698$.

例 16 假设随机变量 X 的绝对值不大于 1；$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$；在事件$(-1<X<1)$出现的条件下，X 在$(-1,1)$内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比. 试求：(1) X 的分布函数；(2) X 取负值的概率 p.

解：(1) 当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$.

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$.

当 $-1\leqslant x<1$ 时，因为

$$P\{-1<X<1\}=1-P\{X=-1\}-P\{X=1\}=\frac{5}{8}$$

则

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X\leqslant x\}=P\{-1\leqslant X\leqslant x\}\\&=P\{X=-1\}+P\{-1<X\leqslant x\}\\&=\frac{1}{8}+P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}P\{-1<X<1\}\\&=\frac{1}{8}+\frac{x+1}{1-(-1)}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}x+\frac{7}{16}\end{aligned}$$

故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{5}{16}x+\frac{7}{16}, & -1\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

(2) $p=P\{X<0\}=F(0^-)=F(0)=\frac{7}{16}$.

注：本例中的 $F(x)$ 为既非离散型也非连续型分布函数.

题型 181 求一维随机变量函数的概率分布

1. 求离散型随机变量函数的分布律或分布函数

思路启迪：若已知 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$，且 $g(x_i)$ 均不相等，则 $P\{Y=g(x_i)\}=p_i(i=1,2,\cdots)$就是 Y 的概率分布；否则，将各相等的 $y=g(x_i)$值对应的概率相加，即可得到 Y 的概率分布.

例 17 已知随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

试求 $Y=2X^2+1$ 的分布律与分布函数.

解：$Y=2X^2+1$ 的所有可能取值为 1,3,9，且

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}=0.2$$

$$P\{Y=3\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=0.1+0.3=0.4$$

$$P\{Y=9\}=P\{X=2\}=0.4$$

即 Y 的分布律为

Y	1	3	9
P	0.2	0.4	0.4

下面求 Y 的分布函数. 由分布函数的定义可得

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=\begin{cases}0, & y<1\\ 0.2, & 1\leqslant y<3\\ 0.6, & 3\leqslant y<9\\ 1, & y\geqslant 9\end{cases}$$

注: 本题要注意的是 $P\{Y=3\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}$,另外,求离散型随机变量的分布函数时一定要分段计算.

例 18　已知 X 的分布律如表 21-2 所列.

表 21-2

X	1	2	3	…	k	…
P	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^k$	…

求 $Y=\sin\frac{\pi}{2}X$ 的分布律.

解: 由题可知,见表 21-3.

表 21-3

$Y=\sin\frac{\pi}{2}X$	1	0	-1	…	$\sin\frac{k\pi}{2}$	…
P	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^k$	…

而

$$\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}1, & k=1+4n\\ 0, & k=2+2n\quad(n=1,2,\cdots)\\ -1, & k=3+4n\end{cases}$$

可见 $Y=\sin\frac{\pi}{2}X$ 只有三个可能值:$-1,0,1$. 且

$$P\{Y=-1\}=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{2}{15}$$

$$P\{Y=0\}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=1\}=1-P\{Y=-1\}-P\{Y=0\}=1-\frac{2}{15}-\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$$

即如表 21 - 4 所列.

表 21 - 4

Y	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

2. 求连续型随机变量函数的概率分布

思路启迪：方法 1 若 $y=g(x)$ 为单调函数，则利用定理求解，定理如下.

设 X 为连续型，其概率密度为 $f_X(x)(-\infty<x<+\infty)$，又函数 $g(x)$ 处处可导且 $g'(x)\neq 0$，则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数，$\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$，$\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$.

方法 2 若 $y=g(x)$ 不是单调函数，则先求出 y 的分布函数

$$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}$$

$F(y)$ 对 y 求导，即得 $f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y}$.

例 19 (1) 设 $X\sim U(0,2)$，求 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率密度.

(2) 设 $X\sim U(0,2)$，求 $Y=2\mathrm{e}^{2(X+1)}$ 的概率密度.

(3) 设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解：(1) 由题设得 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为当 x 在 $(0,2)$ 中变化时，$y=x^2$ 为单调函数，值域为 $(0,4)$，从而可直接利用公式法得

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt{y})'=\frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 因为当 x 在 $(0,2)$ 中变化时，$y=2\mathrm{e}^{2(x+1)}$ 为单调函数，值域为 $(2\mathrm{e}^2,2\mathrm{e}^6)$，反函数为 $x=h(y)=\frac{1}{2}\ln\frac{y}{2}-1$，从而可直接利用公式法得

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{2}-1\right)'=\frac{1}{4y}, & y\in(2\mathrm{e}^2,2\mathrm{e}^6) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 因为当 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 中变化时，$y=x^2$ 不是单调函数. 所以先求 $Y=X^2$ 的分布函数.

令 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$，值域为 $[0,+\infty)$，

① 若 $y<0$，则 $F_Y(y)=0$；

② 若 $0\leqslant y<+\infty$，则

$$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=P\{|X|\leqslant\sqrt{y}\}=P\left\{\left|\frac{X-0}{\sigma}\right|\leqslant\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right\}=2\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right)-1$$

其中 $\Phi(u)$ 是 $U\sim N(0,1)$ 的分布函数，则

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\begin{cases}2\Phi'\left(\dfrac{\sqrt{y}}{\sigma}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sigma\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{y}}\varphi\left(\dfrac{\sqrt{y}}{\sigma}\right), & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

其中 $\varphi(u)$ 是 $U\sim N(0,1)$ 的概率密度.

例 20　设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2+1$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解：显然 $y=x^2+1$ 不是单调函数，所以先计算 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2+1\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y-1\}$$

当 $y\leqslant 1$ 时，$P\{X^2\leqslant y-1\}=0$.

当 $y>1$ 时，

$$P\{X^2\leqslant y-1\}=P\{-\sqrt{y-1}\leqslant X\leqslant\sqrt{y-1}\}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}f_X(x)\mathrm{d}x, & 1<y\leqslant 2\\ \displaystyle\int_{-1}^{1}f_X(x)\mathrm{d}x, & y>2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\displaystyle\int_0^{\sqrt{y-1}}(1-x)\mathrm{d}x, & 1<y\leqslant 2\\ 2\displaystyle\int_0^{1}(1-x)\mathrm{d}x, & y>2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\sqrt{y-1}-(y-1), & 1<y\leqslant 2\\ 1, & y>2\end{cases}$$

故

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 1\\ 2\sqrt{y-1}-(y-1), & 1<y\leqslant 2\\ 1, & y>2\end{cases}$$

于是

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y\leqslant 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

例 21 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda=\dfrac{1}{5}$ 的指数分布，求 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布密度函数.

解：由题设可知 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$. 显然 $y=\min\{x,2\}$ 不是单调函数.

令 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P\{\min\{X,2\}\leqslant y\}$，

① 若 $y\leqslant 0$，则 $F_Y(y)=0$；

② 若 $y\geqslant 2$，则 $F_Y(y)=1$；

③ 若 $0<y<2$，则

$$F_Y(y)=P\{\min\{X,2\}\leqslant y\}=P(X\leqslant y)=\int_0^y\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx=1-e^{-\frac{1}{5}y}$$

即

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ 1-e^{-\frac{1}{5}y}, & 0<y<2\\ 1, & y\geqslant 2\end{cases}$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}y}, & 0<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

例 22 设 Z 为连续型随机变量，分布函数为 $F_Z(z)$，X 服从[0,1]上的均匀分布，则 $Y=F_Z^{-1}(x)$ 的分布函数为(　　).

(A) $F_Z^{-1}(y)$　(B) $F_Z(y)$　(C) $1-F_Z^{-1}(y)$　(D) $1-F_Z(y)$

解：

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F_Z^{-1}(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant F_Z(y)\}=\int_0^{F_Z(y)}dx=F_Z(y)$$

故选(B).

题型 182 综合题

例 23 设有 80 台同类型设备，各台工作相互独立，发生故障的概率都是 0.01，且一台设备的故障一个人能维修. 考虑两种配备维修工人的方案：其一，由 4 人维护，每人承包 20 台；其二，由 3 人共同维护 80 台. 试比较两种方案的优劣.

解：设备发生故障而不能及时维修的概率，值大的为劣，值小的为优.

先考虑第一种方案. $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 人维护的 20 台中发生故障而不能及时维修的事件. X 表示第一个人维护的 20 台同一时刻发生故障的台数，则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{A_1+A_2+A_3+A_4\}\geqslant P(A_1)=P\{X\geqslant 2\}$$

(由题设，若由一个人负责的设备发生故障超过两台即不能维修)

因为 $X\sim B(20,0.01)$，则 $\lambda=np=20\times 0.01=0.2$，故有

$$P\{A_1+A_2+A_3+A_4\}\geqslant P\{X\geqslant 2\}\approx\sum_{k=2}^{20}\frac{(0.2)^k}{k!}e^{-0.2}\approx 0.0175$$

再考虑第二种方案. Y 表示 80 台中同一时刻发生故障的台数，$Y \sim B(80, 0.01)$，$\lambda = np = 80 \times 0.01 = 0.8$，故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{Y \geqslant 4\} \approx \sum_{k=4}^{20} \frac{(0.8)^k}{k!} \mathrm{e}^{-0.8} \approx 0.0091$$

比较可知，后一方案优于前一方案.

例 24　假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.

(1) 求相继两次故障之间的时间间隔 T 的概率分布 p；

(2) 求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下，再无故障运行 8 小时的概率 q.

解：(1) 因为 $N(t)$ 为时间间隔 $t(t \geqslant 0)$ 内发生故障的次数，又 T 表示相继两次故障间的事件间隔，所以当 $T > t$ 时，必有 $N(t) = 0$，于是

$$\begin{aligned} p = F(t) &= P\{T \leqslant t\} = 1 - P\{T > t\} \\ &= 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} \mathrm{e}^{-\lambda t} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} q = P\{T \geqslant 16 \mid T \geqslant 8\} &= \frac{P\{T \geqslant 16, T \geqslant 8\}}{P\{T \geqslant 8\}} = \frac{P\{T \geqslant 16\}}{P\{T \geqslant 8\}} \\ &= \frac{1 - P\{T < 16\}}{1 - P\{T < 8\}} = \frac{1 - F(16)}{1 - F(8)} = \frac{\mathrm{e}^{-16\lambda}}{\mathrm{e}^{-8\lambda}} = \mathrm{e}^{-8\lambda} \end{aligned}$$

例 25　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

现对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求随机变量 V_n 的概率分布.

解：事件为“观测值不大于 0.1”，即事件 $\{X \leqslant 0.1\}$，其概率

$$p = P\{X \leqslant 0.1\} = \int_{-\infty}^{0.1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{0.1} x\mathrm{d}x = 0.01$$

由题意知，X 是服从 $B(n, 0.01)$ 的随机变量，于是

$$P\{V_n = m\} = C_n^m (0.01)^m (1 - 0.01)^{n-m} = C_n^m (0.01)^m (0.99)^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

例 26　假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作的时间为 5 小时. 设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布密度 $f(y)$.

解：设 X 的分布参数为 λ，由于 $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda} = 5$，可见 $\lambda = \frac{1}{5}$. 显然，$Y = \min(X, 2)$.

由例 21 即得 Y 的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}, & 0 \leqslant y < 2 \\ 1, & y \geqslant 2 \end{cases}$$

所以 Y 的分布密度为

$$f(y) = \frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y} = \begin{cases} \frac{1}{5} \mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

第 22 章　多维随机变量及其分布

●重要定理、公式和结论

22.1　重要结论

多维随机变量及其分布中包括以下重要结论：

(1) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，令

$$X=\max\{X_1,\cdots,X_n\},\quad Y=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$$

则

$$F_{\max}(x)=F_{X_1}(x)\cdots F_{X_n}(x)$$

$$F_{\min}(x)=1-[1-F_{X_1}(x)]\cdots[1-F_{X_n}(x)]$$

(2) 设 (X,Y) 在长方形区域 $a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上服从均匀分布，则它的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow X,Y$ 相互独立，且分别服从 $[a,b]$，$[c,d]$ 上的均匀分布.

(3) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，则

$$k_1X_1+\cdots+k_nX_n\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2\right)$$

注： $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $aX+bY$ 不一定服从正态分布，这是因为 X,Y 不一定独立.

●核心题型及思路启迪

22.2　二维随机变量及其分布

题型 183　与二维随机变量概念、性质有关的命题

思路启迪： (1) 函数 $F(x,y)$ 须具备以下性质才可作为某二维随机变量的分布函数：

① $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$；

② 对任意固定的 y，有 $F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$；

对任意固定的 x，有 $F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$；

$F(-\infty,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$；

③ $F(x,y)$对 x,y 均右连续，即 $F(x,y)=F(x+0,y)=F(x,y+0)$.

④ 随机点(x,y)落在矩形域：$x_1<X\leqslant x_2, y_1\leqslant Y\leqslant y_2$ 上的概率：

$$P(x_1<X\leqslant x_2, y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geqslant 0$$

(2) 联合分布律中的常数，可利用 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$ 求解.

若 X 与 Y 相互独立，则 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$.

(3) 联合概率密度 $f(x,y)$中的常数，可利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 求解.

若 X 与 Y 相互独立，则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

例 1　如下四个二元函数，不能作为二维随机变量(X,Y)的分布函数的是(　　).

(A) $F_1(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(B) $F_2(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{y}{3}\right)$

(C) $F_3(x,y)=\begin{cases}1, & x+2y\geqslant 1 \\ 0, & x+2y<1\end{cases}$

(D) $F_4(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

解：函数必须满足分布函数的性质①～④，才能作为某随机变量的分布函数.

因为对 $F_3(x,y)$取四点$(1,0)$，$(0,1)$，$(1,1)$，$(0,0)$有

$$F_3(1,1)-F_3(1,0)-F_3(0,1)+F_3(0,0)=1-1-1+0=-1<0$$

即 $F_3(x,y)$不满足性质④，故选(C).

例 2　设(X,Y)的概率分布如表 22-1 所列.

表 22-1

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则(　　).

(A) $a=0.2, b=0.3$　　(B) $a=0.4, b=0.1$

(C) $a=0.3, b=0.2$　　(D) $a=0.1, b=0.4$

解：由题设，根据 $\sum_{i,j}p_{ij}=1$ 可得

$$a+b=0.5 \tag{1}$$

又 $P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$,即

$$a=(0.4+a)(a+b) \tag{2}$$

由式(1),(2)可解得 $a=0.4,b=0.1$,故选(B).

例 3 设二维连续型随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)\quad(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$$

求常数 A,B,C,并求出(X,Y)的概率密度 $f(x,y)$.

解: 由于 $F(x,y)$是(X,Y)的分布函数,所以有

$$\begin{cases}F(-\infty,y)=0\\F(x,-\infty)=0\\F(+\infty,+\infty)=1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)=0 & (1)\\A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0 & (2)\\A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1 & (3)\end{cases}$$

由于式(1)对任何实数 y 都成立,所以有 $A=0$ 或 $B-\frac{\pi}{2}=0$. 显然当 $A=0$ 时,有 $F(x,y)\equiv0$,这与 $F(x,y)$是分布函数矛盾,因此 $B-\frac{\pi}{2}=0$,即 $B=\frac{\pi}{2}$. 同理可得 $C=\frac{\pi}{2}$,将它们代入式(3)可得 $A=\frac{1}{\pi^2}$. 于是

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)\quad(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$$

且 $$f(x,y)=\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}\quad(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$$

题型 184 求二维随机变量的各种分布(分布律、边缘分布律、边缘分布密度)

1. 已知随机试验,求分布律

思路启迪: 首先确定其可能取值,然后综合利用概率计算的各种方法确定对应的概率.

例 4 将一枚均匀硬币连掷三次,以 X 表示三次试验中出现正面的次数,Y 表示出现正面的次数与出现反面的次数的差的绝对值,求(X,Y)的联合分布律.

分析: 显然 X 的可能取值为 0,1,2,3,而 Y 的可能取值为 1,3,然后利用二项分布公式计算概率.

解: 因为(X,Y)的所有使概率非零的可能取值为(0,3),(1,1),(2,1),(3,3),于是由二项公布公式易得

$$P(X=0,Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},\quad P(X=1,Y=1)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2,Y=1)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8},\quad P(X=3,Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

即(X,Y)的分布律如表 22-2 所列.

表 22-2

X \ Y	1	3
0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$

2. 已知两个随机变量的分布,求与之相关的随机变量的分布

思路启迪: 关键是将新的随机变量的取值转化为已知事件或随机变量的取值.

例 5 设二维随机变量(X,Y)在矩形区域$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上服从二维均匀分布,随机变量

$$U=\begin{cases}1, & X^2+Y^2\leqslant 1\\ -1, & X^2+Y^2>1\end{cases},\quad V=\begin{cases}1, & X\leqslant Y\\ -1, & X>Y\end{cases}$$

求U和V的联合概率分布.

解: 由题设可得

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(U,V)的可能取值为$(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$.

而$\{U=1,V=1\}=\{X^2+Y^2\leqslant 1,X\leqslant Y\}$,如图 22-1 所示,有

$$P\{U=1,V=1\}=\iint_{D_1}\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}S_{D_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{16}$$

类似可求得

$$P\{U=-1,V=-1\}=\frac{12-\pi}{16}$$

$$P\{U=1,V=-1\}=\frac{\pi}{16},\quad P\{U=-1,V=1\}=\frac{4-\pi}{16}$$

所以,U和V的联合概率分布如表 22-3 所列.

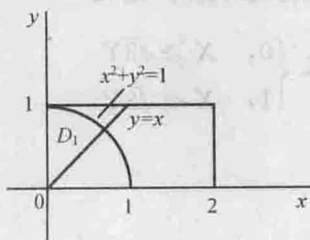


图 22-1

表 22-3

U \ V	−1	1
−1	$\frac{12-\pi}{16}$	$\frac{4-\pi}{16}$
1	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{16}$

3. 已知两个随机变量的分布或联合分布，求边缘分布、条件分布和概率

思路启迪：直接利用公式求解.

(1) 离散型二维随机变量(X,Y)的边缘分布律的求法.

设 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，则

① (X,Y)关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}=p_{i\cdot}$$ （即联合分布律中第 i 行各元素相加）

② (X,Y)关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}=p_{\cdot j}$$ （即联合分布律中第 j 列各元素相加）

条件概率分布为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

(2) 求二维连续型随机变量(X,Y)的边缘概率密度时，先画出使(X,Y)的概率密度不为零的区域 D. 设联合分布密度为 $f(x,y)$，则边缘分布密度的求解程序是：

① 根据 D 先确定出 $f_X(x)$ 中 x（或 $f_Y(y)$ 中 y）的定义区间(a,b)（或(c,d)）；

② 仿二重积分化为累次积分确定累次积分限的方法，定出 y（或 x）的积分限，即在(a,b)（或(c,d)）中任意找一点 x（或 y），过该点从下到上（或从左到右）画一条平行于 y（或 x）轴的直线与区域 D 相交，则先交者为下限，后交者为上限，最后求出积分，即

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_?^?f(x,y)\mathrm{d}y,\quad x\in(a,b)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_?^?f(x,y)\mathrm{d}x,\quad y\in(c,d)$$

条件概率密度分别为

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\quad (f_Y(y)>0)\quad 和\quad f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\quad (f_X(x)>0)$$

例 6 设(X,Y)服从 $D=\{(x,y)\mid y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1\}$上的均匀分布，定义

$$U=\begin{cases}0, & X<0\\ 1, & 0\leqslant X<Y,\\ 2, & Y\leqslant X\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, & X\geqslant\sqrt{3}Y\\ 1, & X<\sqrt{3}Y\end{cases}$$

(1) 求(U,V)的联合分布律；

(2) 求关于 U 的边缘分布律；

(3) 求在 $V=1$ 条件下 U 的条件分布律；

(4) 求 $P\{0\leqslant U<2|V=1\}$.

分析：利用定义，将(U,V)的可能值写出，然后求各个可能值的概率.

解：(1) 由题设可知，(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(U,V)的可能值为$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)$，则

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X<0,X\geqslant\sqrt{3}Y\}=P(\varnothing)=0\quad(\text{因为 }y\geqslant 0)$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X<0,X<\sqrt{3}Y\}=P\{X<0\}=\iint\limits_{\substack{y\geqslant 0,x<0\\ x^2+y^2\leqslant 1}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{0\leqslant X<Y,X\geqslant\sqrt{3}Y\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{0\leqslant X<Y,X<\sqrt{3}Y\}=P\{0\leqslant X<Y\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=2,V=0\}=P\{Y\leqslant X,X\geqslant\sqrt{3}Y\}=P\{X\geqslant\sqrt{3}Y\}=\frac{1}{6}$$

$$P\{U=2,V=1\}=\frac{1}{12}$$

即如表 22-4 所列.

表 22-4

U \ V	0	1
0	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(2) 由(U,V)的联合分布律可得表 22-5.

表 22-5

U	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(3) $P\{V=1\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$，所以

$$P\{U=0\mid V=1\}=\frac{P(U=0,V=1)}{P(V=1)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{5}$$

$$P\{U=1\mid V=1\}=\frac{P(U=1,V=1)}{P(V=1)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{10}$$

即如表 22 - 6 所列.

表 22 - 6

U	0	1	2
$P\{U\mid V=1\}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

(4) $P\{0\leqslant U<2\mid V=1\}=P\{U=0\mid V=1\}+P\{U=1\mid V=1\}=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$.

例 7 设 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}4xe^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

而 Y 在 $(0,X)$ 上服从均匀分布.

(1) 求 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$;

(2) 求 $f_Y(y)$;

(3) 求 $f_{X|Y}(x|1)$;

(4) 求 $P\{0<X<2\mid Y=1\}$.

解: (1) 由题设

$$f_{Y|X}(y)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

所以

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y)=\begin{cases}4e^{-2x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^{+\infty}4e^{-2x}dx, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$.

(3) $f_{X|Y}(x\mid 1)=\frac{f(x,1)}{f_Y(1)}=\begin{cases}\frac{4e^{-2x}}{2e^{-2}}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2(x-1)}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$.

(4) $P\{0<X<2\mid Y=1\}=\int_0^2 f_{X|Y}(x\mid 1)dx=\int_1^2 2e^{-2(x-1)}dx=1-e^{-2}$.

4. 已知条件密度或条件分布律而求联合分布或联合分布律

思路启迪: (1) 当由条件密度 $f_{X|Y}(x,y)$ 计算二维随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$ 时,要想到利用公式

$$f(x,y)=\begin{cases}f_{X|Y}(x,y)f_Y(y), & f_Y(y)\neq 0\\ 0, & f_Y(y)=0\end{cases}$$

(2) 当由条件分布律 $P\{X=x_i\mid Y=y_j\}$ 计算二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律 $P\{X=x_i,Y=y_j\}$ 时,要想到利用公式

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\mid Y=y_j\}P\{Y=y_j\}$$

例 8 设随机变量 X 在区间 $(0,2)$ 上服从均匀分布,而 Y 在区间 $(X,2)$ 上服从均匀分布.

试求：

(1) X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$；

(2) Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(3) 求概率 $P\{X\leqslant 1|Y\leqslant 1\}$.

解：(1)
$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x\leqslant 2\\ 0, & 其他\end{cases}\cdot\begin{cases}\frac{1}{2-x}, & x<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2(2-x)}, & 0<x<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(2)
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}\int_0^y\frac{1}{2(2-x)}\mathrm{d}x, & 0<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{2}{2-y}, & 0<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(3)
$$P\{X\leqslant 1\mid Y\leqslant 1\}=\frac{P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}}{P\{Y\leqslant 1\}}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\frac{1}{2(2-x)}\mathrm{d}y}{\int_0^1\frac{1}{2}\ln\frac{2}{2-y}\mathrm{d}y}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}+\ln 2}{\frac{1}{2}+\ln 2}=\frac{2\ln 2-1}{2\ln 2+1}$$

例 9　设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取值，另一随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值，试求：(1) (X,Y)的联合分布律；(2) X 与 Y 的边缘分布律.

解：$\{X=i,Y=j\}$的取值情况是 $i=1,2,3,4$；j 是不大于 i 的正整数.

由概率的乘法公式有
$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\mid X=i\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}=\frac{1}{4i}\quad(i=1,2,3,4,j\leqslant i)$$

于是(X,Y)的联合分布律、X 与 Y 的边缘分布律如表 22－7 所列.

表 22－7

Y \ X	1	2	3	4	$P\{Y=j\}=p_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{25}{48}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{48}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{48}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{48}$
$P\{X=i\}=p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

注：不难发现，X 与 Y 之间没有独立性，从而联合分布律一般用乘法公式计算.

题型 185 随机变量独立性的判别

思路启迪：判断两个随机变量是否独立，要想到利用

(1) 独立性定义.

设 (X,Y) 是二维随机变量，其分布函数及关于 X,Y 的边缘分布函数分别为 $F(x,y)$，$F_X(x)$，$F_Y(y)$，如果 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ 在 X,Y 平面上成立，则称 X,Y 相互独立.

(2) 如下的充分必要条件：

$$X,Y\text{ 独立}\overset{\text{离散型}}{\Longleftrightarrow}p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

$$X,Y\text{ 独立}\overset{\text{连续型}}{\Longleftrightarrow}f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

其中 $f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别为 (X,Y) 的概率密度及关于 X,Y 的边缘分布密度.

例 10 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，问 X 与 $|X|$ 是否相互独立？说明理由.

解：记 $Y=|X|$ 及 (X,Y) 的分布函数分别为 $F_Y(y)$，$F(x,y)$，则对任意 $x>0$，有

$$F(x,x)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant x\}=P\{Y\leqslant x\}=F_Y(x)$$

且 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t<1$，所以当 $x>0$ 时，有

$$F(x,x)>F_X(x)F_Y(x)$$

从而 X 与 Y 不相互独立，即 X 与 $|X|$ 不相互独立.

例 11 设随机事件 A,B 满足 $P(A)=a$，$P(B|A)=\frac{1}{2}$，$P(A|B)=\frac{1}{4}$，记

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生}\\-1, & A\text{ 不发生}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生}\\-1, & B\text{ 不发生}\end{cases}$$

求使得 X,Y 独立的常数 a.

解：(X,Y) 的概率分布如表 22-8 所列.

表 22-8

$X\backslash Y$	1	−1
1	$P(AB)$	$P(A\bar{B})$
−1	$P(\bar{A}B)$	$P(\bar{A}\,\bar{B})$

由于

$$P(AB)=P(B\mid A)P(A)=\frac{1}{2}a,\quad P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}a$$

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}-P(AB)=2a-\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}a$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(AB)-P(\overline{A}B)-P(A\overline{B})=1-\frac{5}{2}a$$

所以(X,Y)的概率分布及边缘概率分布如表 22-9 所列.

表 22-9

X \ Y	1	-1	$p_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a
-1	$\frac{3}{2}a$	$1-\frac{5}{2}a$	$1-a$
$p_{i\cdot}$	$2a$	$1-2a$	1

当 X,Y 相互独立时,$\frac{1}{2}a=2a\cdot a$,即 $a=\frac{1}{4}$.

例 12　向平面区域 $D:0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 4-x^2$ 内随机地投掷一点(X,Y),设 $A=$"$X\leqslant 1$",$B=$"$Y\leqslant 3$",

(1) 求 A,B 恰好发生一个的概率;

(2) 问 A,B 是否独立? 并讨论 X 与 Y 的独立性.

解: 由题设可知,(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{16}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这是由于 D 的面积为

$$S_D=\int_0^2(4-x^2)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$$

(1) $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)+P(B)-2P(AB)$,而

$$P(A)=P\{X\leqslant 1\}=\iint\limits_{x\leqslant 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{4-x^2}\frac{3}{16}\mathrm{d}y=\frac{11}{16}$$

$$P(B)=P\{Y\leqslant 3\}=\frac{7}{8},\quad P(AB)=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 3\}=\frac{9}{16}$$

所以 $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=\frac{7}{16}$.

(2) 由 $P(AB)\neq P(A)P(B)$知,A,B 不独立. 此外,由

$$\begin{aligned}&P(AB)\neq P(A)P(B)\\ &\Rightarrow P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 3\}\neq P\{X\leqslant 1\}P\{Y\leqslant 3\}\\ &\Rightarrow F(1,3)\neq F_X(1)F_Y(3)\end{aligned}$$

所以 X 与 Y 不独立. 其中 F,F_X,F_Y 分别为(X,Y)的联合分布函数、关于 X 的边缘分布函数和关于 Y 的边缘分布函数.

题型 186　由已知分布求概率

思路启迪: (1) 若已知(X,Y)的联合分布律,计算概率,则先写出满足条件的可能值,然后将取这些值的概率相加即得.

(2) 若已知(X,Y)的联合密度$f(x,y)$，计算二维随机变量概率，则首先根据条件画出二重积分的积分域，然后将二重积分化为累次积分计算即得

$$P\{g(X,Y)\leqslant z_0\}=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z_0} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(3) 若求随机变量的条件概率，设(X,Y)是二维连续型随机变量，其概率密度为$f(x,y)$，则

① 计算条件概率$P\{x\leqslant a\mid y=b\}$时，马上想到条件概率密度

$$f_{X|Y}(x\mid b)=\frac{f(x,b)}{f_Y(b)}\quad(\text{其中 } f_Y(b)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,b)\mathrm{d}x)$$

于是，

$$P(x\leqslant a\mid y=b)=\int_{-\infty}^{a}f_{X|Y}(x\mid b)\mathrm{d}x$$

② 计算条件概率$P(x\leqslant a\mid y\leqslant b)$时，马上想到利用随机事件的条件概率公式

$$P\{x\leqslant a\mid y\leqslant b\}=\frac{P\{x\leqslant a,y\leqslant b\}}{P\{y\leqslant b\}}=\frac{\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b}f(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-\infty}^{b}f_Y(y)\mathrm{d}y}$$

例 13　已知二维随机变量(X,Y)的联合概率分布如表 22-10 所列：

表 22-10

X \ Y	0	1
0	0.12	0.28
1	0.18	0.42

求概率$P\{X<Y\}$，$P\{X=Y\}$和$P\{X+Y=1\}$.

解： (1) 仅当$(X,Y)=(0,1)$时，$X<Y$，故

$$P\{X<Y\}=P\{X=0,Y=1\}=0.28$$

(2) 仅当$(X,Y)=(0,0),(1,1)$时，$X=Y$，故

$$P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=0.12+0.42=0.54$$

(3) 仅当$(X,Y)=(0,1),(1,0)$时，$X+Y=1$，故

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=0.28+0.18=0.46$$

例 14　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x\leqslant y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

计算$P\{X+Y\leqslant 1\}$.

解: $P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant 1\\0<x<y}} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1+\mathrm{e}^{-1}-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$

例 15　设随机变量 X,Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,1)$，则 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=$______.

解:

$$
\begin{aligned}
P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}&=1-P\{\max\{X,Y\}<0\}=1-P\{X<0,Y<0\}\\
&=1-P\{X<0)P(Y<0\}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

注: 本题若用定义求会麻烦很多. 记住以下公式

(1) $P\{\max\{X,Y\}\leqslant z_0\}=P\{X\leqslant z_0,Y\leqslant z_0\}$

$P\{\max\{X,Y\}>z_0\}=1-P\{\max\{X,Y\}\leqslant z_0\}=1-P\{X\leqslant z_0,Y\leqslant z_0\}$

(2) $P\{\min\{X,Y\}\geqslant z_0\}=P\{X\geqslant z_0,Y\geqslant z_0\}$

$P\{\min\{X,Y\}<z_0\}=1-P\{\min\{X,Y\}\geqslant z_0\}=1-P\{X\geqslant z_0,Y\geqslant z_0\}$

题型 187　求二维随机变量函数的分布

思路启迪: 求两个随机变量简单函数的分布时，一般要用到这两个随机变量的联合分布. 而一般所求的两个随机变量是独立的，这时就要想到利用独立的充分必要条件求联合分布.

常见的二维随机变量(X,Y)函数为

(1) $Z=X\pm Y$;　　(2) $Z=XY,\sqrt{X^2+Y^2},\dfrac{X}{Y}$;

(3) $Z_1=\max\{X,Y\},Z_2=\min\{X,Y\}$.

它们的分布律或分布密度的求法如下:

(1) 已知 X,Y 的分布律(概率密度)，求 $Z=X\pm Y$ 的分布律(或概率密度)的程序为:

① 先求出 X,Y 的联合分布律(或联合概率密度 $f(x,y)$);

② 将(X,Y)中所取的 X 与 Y 的值相加减，得出 $X\pm Y=Z$ 的值及该值对应的(X,Y)的概率. 于是即可得出 $Z=X\pm Y$ 的分布律$\Big($联合分布密度通常是先求分布函数 $F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，再将 $F_Z(z)$对 z 求导，即得 $f_Z(z)=\dfrac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}\Big)$.

注: 对 $Z=X+Y$，有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$，特别地，当 X 与 Y 相互独立时，有卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$.

(2) 已知 X,Y 的分布律(分布密度)，求 $Z=XY,\sqrt{X^2+Y^2},\dfrac{X}{Y}$的分布

律(或分布密度)的程序是:

① 由 $f_X(x)$,$f_Y(y)$求出(X,Y)的联合分布律(或联合概率密度$f(x,y)$);

② 再将 X 与 Y 作相乘运算$\left(\text{或}\sqrt{X^2+Y^2},\text{或}\dfrac{X}{Y}\right)$,并求出相应的概率,即得 Z 的分布律(联合分布密度通常是先求分布函数 $F_Z(z)$,在求解过程中用到将二重积分化为累次积分的知识).

注意: 二重积分域是由 $f(x,y)\neq 0$ 的区域与曲线 $z=xy$ $\left(\text{或 } z=\sqrt{x^2+y^2},\text{或 } z=\dfrac{x}{y},\text{其中 } z \text{ 看做常数}\right)$所围的平面区域,由 $f_Z(z)=\dfrac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$即可求得 Z 的分布密度.

(3) $Z_1=\max\{X,Y\}$,$Z_2=\min\{X,Y\}$,当 X 与 Y 相互独立时,其分布函数分别为

$$F_{Z_1}(z)=F_X(z)F_Y(z),\quad F_{Z_2}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

再由 $f_Z(z)=\dfrac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$即可求得 Z 的分布密度.

例 16　设(X,Y)的联合分布律如表 22-11 所列:

表 22-11

X \ Y	-1	1	2
-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

试求:(1) $Z=X+Y$;(2) $Z=XY$;(3) $Z=\dfrac{X}{Y}$;(4) $Z=\max\{X,Y\}$的分布律.

解: 与一维离散型随机变量函数分布律的计算类似,本质上是利用事件及其概率的运算法则.但要注意,Z 的相同值的概率要合并. 由(X,Y)的分布律可得表 22-12.

表 22-12

概　率	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$Z=X+Y$	-2	0	1	1	3	4
$Z=XY$	1	-1	-2	-2	2	4
$Z=\frac{X}{Y}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	2	1
$Z=\max\{X,Y\}$	-1	1	2	2	2	2

于是可得表 22-13～表 22-16 所列结果.

(1)

表 22-13

$Z=X+Y$	-2	0	1	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(2)

表 22-14

$Z=XY$	-2	-1	1	2	4
P	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(3)

表 22-15

$Z=\frac{X}{Y}$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2
P	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

(4)

表 22-16

$Z=\max\{X,Y\}$	-1	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

例 17　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求(X,Y)的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(2) 求 $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(3) 求 $P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

解：(1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2x}1\mathrm{d}y, & 0<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}1\mathrm{d}x & 0<y<2\\0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $Z=2X-Y$ 的非零区间为$[0,2]$.

令 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X-Y\leqslant z\}$，

① 若 $z<0$,则 $F_Z(z)=0$;

② 若 $z\geqslant 2$,则 $F_Z(z)=1$;

③ 若 $0\leqslant z<2$,则

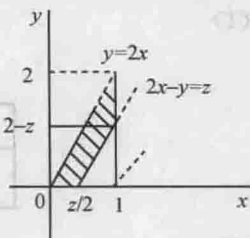


图 22-2

$$F_Z(z)=\iint\limits_{2x-y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \text{图 22-2 中阴影部分面积}$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}\right)(2-z)=z-\frac{1}{4}z^2$$

即

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z-\frac{1}{4}z^2, & 0\leqslant z<2\\ 1, & z\geqslant 2\end{cases}$$

所以

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}1-\frac{1}{2}z, & 0<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) $$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left(X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right)}{P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)}$$

$$P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

$$P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{x\leqslant\frac{1}{2},y\leqslant\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}}1\cdot\mathrm{d}x=\frac{3}{16}$$

所以 $P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{3}{4}$.

例 18 设(X,Y)在 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$上服从均匀分布,求 $U=(X+Y)^2$ 的概率密度.

解: 令 $F(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{(X+Y)^2\leqslant u\}$,又$(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

① 若 $u<0$,则 $F(u)=0$;

② 若 $u\geqslant 16$,则 $F(u)=1$;

③ 若 $0\leqslant u<4$,则

$$F(u)=\iint\limits_{(x+y)^2\leqslant u}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{0\leqslant x+y\leqslant\sqrt{u}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{u})^2}{4}=\frac{u}{8}$$

④ 若 $4\leqslant u<16$,则

$$F(u)=\iint\limits_{0\leqslant x+y\leqslant\sqrt{u}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4-\frac{1}{2}(4-\sqrt{u})^2}{4}$$
$$=1-\frac{1}{8}(4-\sqrt{u})^2$$

即
$$F(u)=\begin{cases}0, & u<0\\ \frac{u}{8}, & 0\leqslant u<4\\ 1-\frac{1}{8}(4-\sqrt{u})^2, & 4\leqslant u<16\\ 1, & u\geqslant 16\end{cases}$$

故
$$f(u)=\frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}u}=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 0<u<4\\ \frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{1}{8}, & 4\leqslant u<16\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 19　设 X,Y 相互独立,其中 X 的概率分布为 $X\sim\begin{bmatrix}1 & 2\\ p & 1-p\end{bmatrix}$,而 Y 的概率密度为 $f(y)$,求 $U=X^2+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

解: 设 $U=X^2+Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}G(u)&=P\{U\leqslant u\}=P\{X^2+Y\leqslant u\}\\&=P\{X^2+Y\leqslant u,X=1\}+P\{X^2+Y\leqslant u,X=2\}\\&=P\{X=1,Y\leqslant u-1\}+P\{X=2,Y\leqslant u-4\}\\&=P\{X=1\}P\{Y\leqslant u-1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant u-4\}\\&=p\int_{-\infty}^{u-1}f(y)\mathrm{d}y+(1-p)\int_{-\infty}^{u-4}f(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

故$g(u)=\frac{\mathrm{d}G(u)}{\mathrm{d}u}=\begin{cases}pf(u-1)+(1-p)f(u-4), & \text{在 } f(u-1) \text{ 与 } f(u-4) \text{ 的连续点}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

例 20　设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生}\\ 0, & A\text{ 不发生}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生}\\ 0, & B\text{ 不发生}\end{cases}$$

(1) 求(X,Y)的概率分布;

(2) 求 $Z=X^2+Y^2$ 与 $Z=X^2Y^2$ 的概率分布.

解: (1) $P(A)=\frac{1}{4},P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12},P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$.

于是

$$\begin{aligned}P(X=0,Y=0)&=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A+B})\\&=1-P(A+B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=1-\frac{2}{3}-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

即如表 22 - 17 所列.

表 22 - 17

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(2) 由(1)可得表 22 - 18.

表 22 - 18

(X,Y)	X^2+Y^2	X^2Y^2	P
(0,0)	0	0	$\frac{2}{3}$
(0,1)	1	0	$\frac{1}{12}$
(1,0)	1	0	$\frac{1}{6}$
(1,1)	2	1	$\frac{1}{12}$

即如表 22 - 19 和表 22 - 20 所列.

表 22 - 19

X^2+Y^2	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

表 22 - 20

X^2Y^2	0	1
P	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{12}$

题型 188 关于二维正态分布问题

思路启迪：设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则

(1) $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $\mathrm{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sigma_1\sigma_2$.（反之，若 X,Y 相互独立且服从正态分布，则 (X,Y) 服从二维正态分布.）

(2) $\rho=\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow X,Y$ 相互独立，即 X,Y 独立与 X,Y 不相关等价.

(3) X,Y 的任一线性组合服从一维正态分布，且

$$aX+bY \sim N(a\mu_1+b\mu_2, a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$$

(4) 若 U,V 是 X,Y 的线性组合，则 (U,V) 服从二维正态分布.

(5) 其概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

例 21　设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,1)$，求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解： 由于 X,Y 相互独立，所以 (X,Y) 服从二维正态分布，因此 $Z=2X-Y+3$ 也服从正态分布.

由于

$$EZ=E(2X-Y+3)=2EX-EY+3=5$$
$$DZ=D(2X-Y+3)=4DX+DY=9$$

即 $Z\sim N(5,9)$，所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}\quad(-\infty<z<+\infty)$$

例 22　设 $(X,Y)\sim N\left(1,2;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，且 $P(aX+bY\leqslant 1)=\frac{1}{2}$，则(　　).

(A) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{4}$　　(B) $a=\frac{1}{4},b=-\frac{1}{2}$

(C) $a=-\frac{1}{4},b=\frac{1}{2}$　　(D) $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4}$

解： 由题设可知

$$X\sim N(1,1),\quad Y\sim N(2,4),\quad \rho_{XY}=-\frac{1}{2}$$

所以

$$aX+bY\sim N(a+2b, *)$$

则 $P(aX+bY\leqslant 1)=\frac{1}{2}\Rightarrow a+2b=1$. 所以应选(D).

例 23　设 X,Y,Z 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(2,2)$，$Z\sim N(3,7)$，记 $a=P(X<Y)$，$b=P(Y<Z)$，则(　　).

(A) $a>b$　　(B) $a<b$　　(C) $a=b$　　(D)不能确定

解：

$$a=P(X<Y)=P(X-Y<0)=P\left(\frac{X-Y+1}{2}<\frac{1}{2}\right)=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$$

(因为 $X-Y\sim N(-1,2^2)$)

$$b=P(Y<Z)=P(Y-Z<0)=P\left(\frac{Y-Z+1}{3}<\frac{1}{2}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$$

(因为 $Y-Z\sim N(-1,3^2)$)

而 $\Phi(x)$ 单调增加，且 $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$，所以 $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)>\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$，故选(A).

例 24　设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,2^2)$，$Y\sim N(1,1^2)$，令 $U=X+2Y$，$V=X-Y$，求 (U,V) 的概率密度 $f(u,v)$.

解：由于 (X,Y) 服从二维正态分布，所以 (U,V) 也服从二维正态分布，设

$$(U,V)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$$

由于

$$\mu_1 = EU = E(X+2Y) = EX + 2EY = 2$$

$$\mu_2 = EV = E(X-Y) = EX - EY = -1$$

$$\sigma_1^2 = DU = D(X+2Y) = DX + 4DY = 8$$

$$\sigma_2^2 = DV = D(X-Y) = DX + DY = 5$$

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}} = \frac{1}{\sqrt{8\times 5}}\operatorname{cov}(X+2Y,X-Y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{10}}[\operatorname{cov}(X,X)-\operatorname{cov}(X,Y)+2\operatorname{cov}(Y,X)-2\operatorname{cov}(Y,Y)]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{10}}(DX-2DY) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

所以 $(U,V)\sim N\left(2,-1;8,5;\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. 于是 (U,V) 的概率密度为

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(u-\mu_1)^2}{\rho_1^2}-\frac{2\rho(u-\mu_1)(v-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(v-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{12\pi}e^{-\frac{5}{9}\left[\frac{(u-2)^2}{8}-\frac{2(u-2)(v+1)}{10}+\frac{(v+1)^2}{5}\right]}$$

第 23 章　随机变量的数字特征

●重要定理、公式和结论

23.1　重要性质和公式

1. 期望的性质

(1) $EC=C$(C 为常数),$E(X+C)=EX+C$(C 为常数);

(2) $E(CX)=CEX$(C 为常数);

(3) $E(k_1X_1+\cdots+k_nX_n)=k_1EX_1+\cdots+k_nEX_n$($k_1,\cdots,k_n$ 是常数);

(4) 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立,则 $E(X_1\cdots X_n)=E(X_1)\cdots E(X_n)$,一般地,

$$E(f_1(X_1)\cdots f_n(X_n))=E(f_1(X_1))\cdots E(f_n(X_n))$$

2. 方差的性质

(1) $D(C)=0$(C 为常数),$D(X+C)=DX$(C 为常数);

(2) $D(aX)=a^2DX,D(aX+b)=a^2DX$($a,b$ 是常数);

(3) 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立,则

$$D(k_1X_1+\cdots+k_nX_n)=k_1^2DX_1+\cdots+k_n^2DX_n\quad(k_1,\cdots,k_n\text{ 是常数})$$

但 $D(X_1\cdots X_n)\neq D(X_1)\cdots D(X_n)$.

3. 几种重要分布的期望和方差

(1) $X\sim(0,1)$分布:$EX=p,DX=p(1-p)$;

(2) $X\sim B(n,p)$:$EX=np,DX=np(1-p)$;

(3) $X\sim P(\lambda)$:$EX=DX=\lambda$;

(4) $X\sim U(a,b)$:$EX=\dfrac{a+b}{2},DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$;

(5) $X\sim E(\lambda)$:$EX=\dfrac{1}{\lambda},DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$;

(6) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$:$EX=\mu,DX=\sigma^2$.

4. 求期望和方差常用的公式

(1) $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots=\dfrac{a}{1-q}(|q|<1)$;

(2) $a+2aq+3aq^2+\cdots+naq^{n-1}+\cdots=\dfrac{a}{(1-q)^2}(|q|<1)$;

(3) $a+2^2aq+3^2aq^2+\cdots+n^2aq^{n-1}+\cdots=\dfrac{a(1+q)}{(1-q)^3}(|q|<1)$;

(4) $1+\lambda+\dfrac{1}{2!}\lambda^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}\lambda^n+\cdots=e^{\lambda}$;

(5) Γ 函数的性质：$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$，其中 $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

(6) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

23.2 重要结论

(1) $DX=\mathrm{E}X^2-(\mathrm{E}X)^2$ 或 $\mathrm{E}X^2=DX+(\mathrm{E}X)^2$；

(2) $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y$ 或 $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y$；

(3) $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\mathrm{cov}(X,Y)=a^2DX+b^2DY+2ab\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$；

(4) $\rho_{XY}=0\Leftrightarrow\mathrm{cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y\Leftrightarrow D(X+Y)=DX+DY$.

● 核心题型及思路启迪

23.3 一维随机变量的数字特征

题型 189 求一维随机变量的数字特征

思路启迪： 这类题型主要是求期望和方差，常用方法有：

(1) 对分布律或密度已知的情形，直接按定义计算，对由随机试验给出的随机变量，先求分布，再按定义计算.

① 离散型：设 $P(X=x_i)=p_i$，则定义 X 的数学期望为

$$\mathrm{E}X=\sum_i x_ip_i,\quad DX=\sum_i(x_i-\mathrm{E}X)^2p_i$$

② 连续型：设 $X\sim f(x)$，则

$$\mathrm{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x,\quad DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathrm{E}X)^2f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 利用期望和方差的性质.

(3) 利用常见分布的期望和方差.

例 1 设有甲、乙两个篮球队进行比赛，规定其中一队胜 4 场，则比赛宣告结束. 假设两球队获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$，试求需要比赛场数 X 的数学期望.

解： X 的可能取值为 4,5,6,7，则

$$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0+C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

$$P(X=5)=\frac{1}{2}C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{1}{2}C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

$$P(X=6)=\frac{1}{2}C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

$$P(X=7)=1-P(X=4)-P(X=5)-P(X=6)=\frac{5}{16}$$

故 $EX=4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}=5.8$，于是需要比赛 6 场.

例 2　按规定某车站每天 8:00～9:00 和 9:00～10:00 都恰有一辆客车到站，各车到站时刻是随机的，且各车到站的时刻相互独立，其规律如表 23 - 1 所列.

表 23 - 1

到站时刻	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概　率	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

一旅客 8:20 到车站，求他候车时间的数学期望及方差.

解：若该旅客乘 9:10 的车，意味着 8:00～9:00 这趟车在 8:10 开走了. 如果他候车 50 分钟，则对应的“第一趟车 8:10 开走”和“第二趟车 9:10 开”两事件同时发生的概率为

$$P(X=50)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$$

如果他候车 70 分钟，则按 90 分钟对应的概率类似处理. 于是候车的分布律如表 23 - 2 所列.

表 23 - 2

X	10	30	50	70	90
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$

故
$$EX=10\times\frac{2}{5}+30\times\frac{2}{5}+50\times\frac{1}{25}+70\times\frac{2}{25}+90\times\frac{2}{25}=30.8$$

$$EX^2=10^2\times\frac{2}{5}+30^2\times\frac{2}{5}+50^2\times\frac{1}{25}+70^2\times\frac{2}{25}+90^2\times\frac{2}{25}=1\,540$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=1\,540-30.8^2=591.36$$

例 3　把 4 个球随机投入 4 个盒子中，设 X 表示空盒子的个数，求 EX 和 DX.

解：X 可能的取值为 0,1,2,3，对应的概率为

$$P(X=0)=\frac{4!}{4^4}=\frac{6}{64},\quad P(X=1)=\frac{C_4^1C_4^2\cdot 3!}{4^4}=\frac{36}{64}$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2(2C_4^3+C_4^2)}{4^4}=\frac{21}{64},\quad P(X=3)=\frac{1}{64}$$

于是 X 的分布律如表 23 - 3 所列.

表 23 - 3

X	0	1	2	3
P	$\frac{6}{64}$	$\frac{36}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{1}{64}$

故
$$EX = 0\times\frac{6}{64}+1\times\frac{36}{64}+2\times\frac{21}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{81}{64}$$
$$EX^2 = 0^2\times\frac{6}{64}+1^2\times\frac{36}{64}+2^2\times\frac{21}{64}+3^2\times\frac{1}{64}=\frac{129}{64}$$
$$DX = EX^2-(EX)^2=\frac{1\ 695}{64^2}$$

题型 190 求一维随机变量函数的数字特征或逆问题

思路启迪：(1)求随机变量函数的期望一般不需先求出随机变量函数的分布，再按定义计算；而是直接利用期望公式进行计算，即

$$EY=\sum_i g(x_i)p_i \quad 或 \quad EY=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi_X(x)\mathrm{d}x$$

这里 $Y=g(X)$.

(2) 无论 X 是离散型还是连续型，$Y=g(X)$ 的方差用公式计算为

$$DY=D[g(X)]=EY^2-(EY)^2$$

(3) 已知数字特征可反求未知参数，但要注意分布律或概率密度 $\varphi(x)$ 的隐含性质，即

$$\sum_i p_i=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$$

例 4 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2 \\ cx+b, & 2\leqslant x<4 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

已知 $EX=2$，$P(1<X<3)=\frac{3}{4}$，求：

(1) 常数 a,b,c；

(2) 随机变量 $Y=\mathrm{e}^X$ 的数学期望和方差.

解：(1) 由分布密度的性质知 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，得

$$1=\int_0^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^4(cx+b)\mathrm{d}x=2a+6c+2b \tag{1}$$

又由 $EX=2$，得

$$2=\int_0^2 ax^2\mathrm{d}x+\int_2^4(cx+b)x\mathrm{d}x=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+6b \tag{2}$$

再由 $P(1<X<3)=\frac{3}{4}$，得

$$\frac{3}{4}=\int_1^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^3(cx+b)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b \tag{3}$$

解联立方程(1)～(3)，得 $a=\frac{1}{4}$，$b=1$，$c=-\frac{1}{4}$.

(2) $$EY = E(e^X) = \int_0^2 \frac{1}{4}xe^x dx + \int_2^4 \left(-\frac{1}{4}x+1\right)e^x dx = \frac{1}{4}(e^2-1)^2$$

$$EY^2 = E(e^{2X}) = \int_0^2 \frac{1}{4}xe^{2x} dx + \int_2^4 \left(-\frac{1}{4}x+1\right)e^{2x} dx = \frac{1}{16}(e^4-1)^2$$

所以 $$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{16}(e^4-1)^2 - \frac{1}{16}(e^2-1)^4 = \frac{1}{4}e^2(e^2-1)^2$$

例 5 假设公共汽车起点站于每时的 10 分、30 分、50 分发车，某乘客不知发车时间，在每小时内任一时刻到达车站是随机的，求乘客到车站等车时间的数学期望.

解： 由于乘客在每小时内任一时刻到达车站是随机的，因此可认为乘客到达车站的时刻 X 在 $[0,60]$ 中服从均匀分布，于是其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & 0 < x \leqslant 60 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然，乘客等候时间 Y 是到达时刻 X 的函数，为

$$Y = g(X) = \begin{cases} 10-X, & 0 < X \leqslant 10 \\ 30-X, & 10 < X \leqslant 30 \\ 50-X, & 30 < X \leqslant 50 \\ 70-X, & 50 < X \leqslant 60 \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} EY &= E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \\ &= \int_0^{10}(10-x)\cdot\frac{1}{60}dx + \int_{10}^{30}(30-x)\cdot\frac{1}{60}dx + \int_{30}^{50}(50-x)\cdot\frac{1}{60}dx + \int_{50}^{60}(70-x)\cdot\frac{1}{60}dx \\ &= \frac{25}{3} \end{aligned}$$

23.4 二维或多维随机变量的数字特征

题型 191 求二维随机变量及其函数的数字特征

思路启迪： (1) 二维随机变量 (X,Y) 的数字特征主要指 EX, EY, DX, DY, $\text{cov}(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$, $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，故如果 (X,Y) 的联合分布律或分布密度是已知的，则可按相应的公式求出.

(2) 其函数的数字特征主要是数学期望. 若函数为 $z=g(x,y)$，则利用以下公式计算：

$$E(g(X,Y)) = \sum_j \sum_i g(x_i, y_j) p_{ij} \quad (P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij})$$

或

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy \quad ((X,Y) \sim f(x,y))$$

常见情形如下：

① 若 $Z=g(X,Y)$，(X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则

$$\mathrm{E}Z=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$f(x,y)$ 只在 D 非零.

② 若 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度为 $f(z)$，则 $\mathrm{E}Z=\int_{-\infty}^{+\infty}zf(z)\mathrm{d}z$.

③ 若 $Z=g(X,Y)=h[g_1(X,Y)]$，$u=g_1(X,Y)\sim f(u)$，则

$$\mathrm{E}Z=\mathrm{E}h(U)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)f(u)\mathrm{d}u$$

(3) 在求随机变量函数的数字特征时，有时利用数字特征的性质更简便.

① $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$.

② $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\mathrm{cov}(X,Y)$.

③ $\mathrm{cov}(X,Y+Z)=\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(X,Z)$.

④ $|\rho_{XY}|\leqslant 1$，且 $|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1$.

⑤ $\rho_{XY}=0$，称 X,Y 不相关.

注： $\rho_{XY}=0\nRightarrow X,Y$ 相互独立；但 X,Y 相互独立，DX,DY 都不为零 $\Rightarrow \rho_{XY}=0$.

⑥ $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}X\mathrm{E}Y$，$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$.

例 6　已知随机变量 X,Y 的联合分布律如表 23-4 所列：

表 23-4

X \ Y	−1	0	1
−1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

试求：(1) $\mathrm{E}X,\mathrm{E}Y,DX,DY$；(2) $\mathrm{cov}(X,Y)$，ρ_{XY}.

解： 由题设可求出 X 与 Y 的边缘分布律如表 23-5 所列.

表 23-5

X	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$
Y	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

于是

(1)
$$EX=(-1)\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$$
$$EX^2=(-1)^2\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1^2\times\frac{3}{8}=\frac{6}{8}$$
$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

同理可得 $EY=0, DY=\frac{3}{4}$.

(2)
$$EXY=\sum_i\sum_j ijp_{ij}=(-1)(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times 0\times\frac{1}{8}+$$
$$(-1)\times 1\times\frac{1}{8}+0\times(-1)\times\frac{1}{8}+0\times 0\times 0+0\times 1\times\frac{1}{8}+$$
$$1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times 0\times\frac{1}{8}+1\times 1\times\frac{1}{8}=0$$
$$\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$$

于是 $\rho_{XY}=0$.

例 7　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求:(1) 常数 c;(2) EX, EY, DX, DY;(3) $\mathrm{cov}(X,Y), \rho_{XY}$.

解:(1) 由概率密度的性质可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y\mathrm{d}y=c\int_0^1\frac{1}{2}x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{8}c$$

于是 $c=8$.

(2)
$$EX=\int_0^1\int_0^x x\cdot 8xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^x y\mathrm{d}y=4\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$$
$$EX^2=\int_0^1\int_0^x x^2\cdot 8xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\int_0^x y\mathrm{d}y=4\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$
$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}$$
$$EY=\int_0^1\int_0^x y\cdot 8xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{8}{15}$$
$$EY^2=\int_0^1\int_0^x y^2\cdot 8xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^3\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

$$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{8}{15}\right)^2=\frac{11}{225}$$

(3) $$EXY=\int_0^1\int_0^x xy\cdot 8xy\,dx\,dy=8\int_0^1 x^2\,dx\int_0^x y^2\,dy=\frac{8}{3}\int_0^1 x^5\,dx=\frac{4}{9}$$

$$\text{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\ \sqrt{DY}}=\frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{2}{75}}\times\sqrt{\frac{11}{225}}}=\frac{2\sqrt{66}}{33}$$

例 8 设(X,Y)的概率分布如表 23-6 所列.

表 23-6

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.2

则 $\text{cov}(X^2,Y^2)=$______.

分析: 由于 $\text{cov}(X^2,Y^2)=E(X^2Y^2)-EX^2EY^2$,则需求出 X^2,Y^2 的概率分布.

解: 由题知,如表 23-7 所列.

表 23-7

X^2	0	1
P	0.4	0.6

Y^2	0	1
P	0.5	0.5

所以 $EX^2=0.6$,$EY^2=0.5$.

又

X^2Y^2	0	1
P	0.72	0.28

所以 $EX^2Y^2=0.28$.

故 $\text{cov}(X^2,Y^2)=E(X^2Y^2)-EX^2EY^2=0.28-0.6\times0.5=-0.02$.

注: 若 X,Y 均服从 0-1 分布,m,n 为正整数,则

$$E(X^mY^n)=P(X^mY^n=1)=P(X=1,Y=1)$$

例 9 设 $\rho_{XY}=0.9$,若 $Z=X-0.4$,则 Y 与 Z 的相关系数为______.

解:

$$\rho_{YZ}=\frac{\text{cov}(Y,Z)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DZ}}=\frac{\text{cov}(Y,X-0.4)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DZ}}$$

$$=\frac{\text{cov}(Y,X-0.4)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DX}}$$

$$=\frac{\text{cov}(Y,X)-\text{cov}(Y,0.4)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DX}}$$

$$=\frac{\text{cov}(Y,X)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DX}}\quad (\text{cov}(Y,0.4)=\mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}Y)(0.4-0.4)]=0)$$

$$=\rho_{XY}=0.9$$

例 10　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\overline{X}(i=1,2,\cdots,n)$. 求：

(1) Y_i 的方差 $DY_i(i=1,2,\cdots,n)$；(2) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\text{cov}(Y_1,Y_n)$.

解：由题设，知 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 相互独立，且都服从 $N(0,1)$，所以有

$$\mathrm{E}X_i=0,\quad DX_i=1\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\mathrm{E}\overline{X}=0,\quad D\overline{X}=D\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)=\frac{1}{n^2}D\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)=\frac{1}{n}$$

$$\text{cov}(X_i,\overline{X})=\text{cov}\Big(X_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)=\frac{1}{n}\text{cov}(X_i,X_i)=\frac{1}{n}DX_i=\frac{1}{n}$$

(1)　$$DY_i=D(X_i-\overline{X})=DX_i+D(\overline{X})-2\text{cov}(X_i,\overline{X})$$

$$=1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n}=\frac{n-1}{n}$$

(2)　$$\text{cov}(Y_1,Y_n)=\text{cov}(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})$$

$$=\text{cov}(X_1,X_n)-\text{cov}(X_1,\overline{X})-\text{cov}(\overline{X},X_n)+\text{cov}(\overline{X},\overline{X})$$

$$=0-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2}=-\frac{1}{n}$$

例 11　设 $(X,Y)\sim N\Big(1,2;1,4,-\frac{1}{8}\Big)$，求 $\mathrm{E}|2X-Y|$，$D|2X-Y|$.

解：因为 $(X,Y)\sim N\Big(1,2;1,4,-\frac{1}{8}\Big)$，所以

$$X\sim N(1,1),\quad Y\sim N(2,4),\quad \rho_{XY}=-\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{E}(2X-Y)=2\mathrm{E}X-\mathrm{E}Y=0$$

$$D(2X-Y)=4DX+DY-4\text{cov}(X,Y)$$

$$=4+4-4\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=8-4\times\Big(-\frac{1}{8}\Big)\times1\times2=9$$

因此，$2X-Y\sim N(0,9)$，$U=\frac{2X-Y}{3}\sim N(0,1)$.

于是

$$\mathrm{E}\mid 2X-Y\mid=\mathrm{E}\mid 3U\mid=3\mathrm{E}\mid U\mid$$

$$=3\int_{-\infty}^{+\infty}\mid u\mid\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\frac{6}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\frac{6}{\sqrt{2\pi}}$$

$$D\mid 2X-Y\mid=\mathrm{E}\mid 2X-Y\mid^2-(\mathrm{E}\mid 2X-Y\mid)^2=\mathrm{E}(2X-Y)^2-\frac{18}{\pi}$$

$$=D(2X-Y)+[\mathrm{E}(2X-Y)]^2-\frac{18}{\pi}=9-\frac{18}{\pi}$$

例 12　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $E[\max(X,Y)]$.

解：记 $U=\frac{X-\mu}{\sigma}$，$V=\frac{Y-\mu}{\sigma}$（将 X 和 Y 标准化），则 $X=\mu+\sigma U$，$Y=\mu+\sigma V$，于是由 $\max(X,Y)=\mu+\sigma\max(U,V)=\mu+\frac{\sigma}{2}[U+V+|U-V|]$ 可得

$$E[\max(X,Y)]=\mu+\frac{\sigma}{2}[EU+EV+E|U-V|]$$

由于 $U\sim N(0,1)$，$V\sim N(0,1)$，且 U,V 相互独立，所以 $U-V\sim N(0,2)$，从而

$$E|U-V|=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{t^2}{2\cdot 2}}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{4}}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

所以

$$E[\max(X,Y)]=\mu+\frac{\sigma}{2}\left[0+0+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

题型 192　有关数字特征与独立性及相关性的关系的命题

思路启迪：(1) X 与 Y 独立 $\Rightarrow\rho_{XY}=0$，即 X 与 Y 不相关；但不相关，不一定独立.

(2) 若 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow$ X 与 Y 不相关.

(3) $\operatorname{cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow\rho_{XY}=0\quad(DX>0,DY>0)$

$$\Leftrightarrow E(XY)=EXEY$$
$$\Leftrightarrow D(X+Y)=DX+DY$$

例 13　设随机变量 X 和 Y 独立且同分布，具有方差 $\sigma^2>0$，则随机变量 $U=X+Y$ 和 $V=X-Y$（　　）.

(A) 独立　　(B) 不独立　　(C) 相关　　(D) 不相关

解：从计算 $U=X+Y$ 和 $V=X-Y$ 的协方差入手. 由于

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(U,V)&=\operatorname{cov}(X+Y,X-Y)\\&=\operatorname{cov}(X,X)-\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,X)-\operatorname{cov}(Y,Y)\\&=DX-DY=0\end{aligned}$$

且 $DX=DY=\sigma^2>0$，所以 $\rho_{XY}=0$，从而 U 和 V 不相关，故选(D).

例 14　设随机变量 X 和 Y 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 上服从均匀分布，试问：

(1) X 和 Y 是否独立？(2) X 和 Y 是否相关？

解：(1) 由题设可知 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是易得两个边缘密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & |x|<R\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, & |y|<R\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

故有 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，即 X 和 Y 不独立.

(2) 由(1)可知

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}x\,\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=0$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi_Y(x)\mathrm{d}y=\int_{-R}^{R}y\,\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y=0$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{xy}{\pi R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

所以 $\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$，且易知 $DX>0,DY>0$，故 $\rho_{XY}=0$，即 X 和 Y 不相关.

注：从本例可以看出，两个不相关的随机变量可以不独立，但独立一定不相关.

例 15　设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的泊松分布，随机变量 $X_k=\begin{cases}0, & Y\leqslant k\\1, & Y>k\end{cases}$　$(k=0,1)$.

试求：(1) X_0 和 X_1 的联合分布律；(2) $E(X_0-X_1)$；(3) X_0 和 X_1 是否相关?

解：(1)

$$P(X_0=0,X_1=0)=P(Y\leqslant 0,Y\leqslant 1)=P(Y=0)=e^{-1}$$

$$P(X_0=1,X_1=0)=P(Y>0,Y\leqslant 1)=P(Y=1)=e^{-1}$$

$$P(X_0=0,X_1=1)=P(Y\leqslant 0,Y>1)=0$$

$$P(X_0=1,X_1=1)=P(Y>0,Y>1)=P(Y>1)$$

$$=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-2e^{-1}$$

所以 X_0 和 X_1 的联合分布律如表 23-8 所列.

表 23-8

X_0 \ X_1	0	1
0	e^{-1}	0
1	e^{-1}	$1-2e^{-1}$

(2) 由(1)可知 X_0 和 X_1 的边缘分布律如表 23-9 所列.

表 23-9

X_0	0	1
P	e^{-1}	$1-e^{-1}$
X_1	0	1
P	$2e^{-1}$	$1-2e^{-1}$

所以 $E(X_0-X_1)=E(X_0)-E(X_1)=1-e^{-1}-(1-2e^{-1})=e^{-1}$.

(3) 因为

$$\mathrm{cov}(X_0,X_1)=E(X_0X_1)-EX_0EX_1=1-2e^{-1}-(1-e^{-1})(1-2e^{-1})=e^{-1}-2e^{-2}$$

所以 X_0 和 X_1 相关.

题型 193　利用 0-1 分布求多维随机变量的数字特征

思路启迪：求解程序如下：

(1) 分析欲求解的随机变量 X 是否可看成若干随机变量 X_i 的和，而 X_i 服从 0-1 分布；

(2) 引入新随机变量 X_i，有

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 事件发生}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 事件不发生}\end{cases}$$

(3) 求出 $E(X_i)$，$D(X_i)$；

(4) 再分析 X_i 与 X_j 是否独立，然后根据相应公式求出 $E(X)$，$D(X)$.

设 $P(X_i=1)=p$，$P(X_i=0)=1-p$，则 $E(X_i)=p$，$D(X_i)=p(1-p)$，故

$$EX=\sum_i E(X_i)$$

$$DX=D(\sum_i X_i)\xlongequal{X_i,X_j\text{ 相互独立}}\sum_i D(X_i)$$

$$DX=D(\sum_i X_i)\xlongequal{X_i,X_j\text{ 不相互独立}}\sum_i D(X_i)+2\sum_{i<j}\sum \mathrm{cov}(X_i,X_j)$$

例 16　一民航大巴载有 50 位乘客从机场开出，乘客有 10 个车站可以下车，如到达一车站没有人下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 EX 和 DX.（设每位乘客在各个车站下车是等可能的，并且各乘客是否下车相互独立）

分析：停车次数 X 可看作 $X_i(i=1,2,\cdots,10)$ 的和，X_i 服从 0-1 分布，因此该题可用 0-1 分布法求解.

解：引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{在第 } i \text{ 站没人下车}\\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,10)$$

则 $X=\sum\limits_{i=1}^{10}X_i$.

由题意，任一乘客在第 i 站不下车的概率为 $\frac{9}{10}$，因此 50 位乘客均不在第 i 站下车的概率为 $\left(\frac{9}{10}\right)^{50}$，在第 i 站有人下车的概率为 $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}$，即

$$P(X_i=0)=\left(\frac{9}{10}\right)^{50},\quad P(X_i=1)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}$$

于是 $EX_i=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}$，$DX_i=\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\times\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\right]$. 故

$$EX=\sum_{i=1}^{10}EX_i=10\times\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\right]$$

因为 $X_i,X_j(i\neq j)$ 相互独立，所以

$$DX=\sum_{i=1}^{10}DX_i=10\times\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\times\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\right]$$

例 17　设有 n 把看上去样子相同的钥匙,其中只有一把能打开锁,用它们逐一去试开锁,抽哪一把是等可能的,且每次开锁是相互独立的,每把钥匙试开一次后拿走. 记 X 表示打开锁时已经试开过锁的次数,求 EX.

解: 引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{前}(i-1)\text{次取的钥匙中有能打开锁的}\\ 1, & \text{前}(i-1)\text{次取的钥匙中没有能打开锁的}\end{cases}\quad(i=2,\cdots,n)$$

则

$$X_1=1,\quad EX_1=1,\quad X=X_1+\sum_{i=2}^{n}X_i,\quad X_i\sim(0,1)\text{分布}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

所以

$$EX=EX_1+\sum_{i=2}^{n}EX_i=1+\sum_{i=2}^{n}P(X_i=1)$$

而

$$\begin{aligned}P(X_i=1)&=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_{i-1}})\\&=P(\overline{A_{i-1}}\mid\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_{i-2}})P(\overline{A_{i-2}}\mid\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_{i-3}})\cdots P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})\\&=\frac{n-i+1}{n-i+2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n-i+1}{n}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}EX&=EX_1+\sum_{i=2}^{n}EX_i=1+\sum_{i=2}^{n}\frac{n-i+1}{n}\\&=1+\frac{1}{n}[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]=\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

第24章 大数定律和中心极限定理

●重要定理、公式和结论

24.1 大数定律

1. 切比雪夫不等式

设 $EX=\mu, DX=\sigma^2$ 均存在，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}\quad \text{或}\quad P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

2. 大数定律

(1) 依概率收敛

设 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \cdots$ 为一随机变量列，a 为一常数，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Z_n-a|<\varepsilon\}=1$$

则称 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \cdots$ 依概率收敛于 a，记作 $Z_n\xrightarrow{P}a$.

(2) 切比雪夫大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，$EX_i=\mu_i, DX_i=\sigma_i^2$ 均存在，且 $\sigma_i^2\leqslant M$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$$

即对任意给定的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}=1$.

(3) 伯努利大数定律

设 $p=P(A)$ 是“事件 A 在一次试验中出现”的概率，$f_n(A)$ 是 n 次独立重复试验(伯努利试验)中事件 A 出现的频率，则 $f_n(A)$ 依概率收敛于 $p=P(A)$，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|f_n(A)-p|<\varepsilon\}=1$.

注：伯努利大数定律是频率稳定性的数学定理，直观上表示当 n 充分大时，有

$$P\{f_n(A)\approx p\}\approx 1$$

(4) 辛钦大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且同分布，且 $EX_i=\mu$ 存在，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\mu$$

24.2　中心极限定理

1. 林德伯格-莱维定理

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立且同分布，且 $EX_i=\mu,DX_i=\sigma^2$ 存在，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)\quad 或 \quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\sim N(0,1)\quad (n\to\infty)$$

2. 棣莫弗-拉普拉斯定理

若 $\eta_n\sim B(n,p)$，则

$$\eta_n=X_1+X_2+\cdots+X_n,\quad EX_i=p,\quad DX_i=p(1-p)$$

$$\Rightarrow\eta_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(np,np(1-p))\quad (n\to\infty),\quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)\quad (n\to\infty)$$

● 核心题型及思路启迪

题型 194　估算随机事件的概率

思路启迪：方法 1　利用切比雪夫不等式，解题程序如下：

(1) 依据题意选择随机变量 X，求出 EX,DX；

(2) 将 $P\{a<X<b\}$ 化为 $P\{|X-EX|<\varepsilon\}$ 或 $P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}$；

(3) 由切比雪夫不等式作出 $P\{a<X<b\}$ 的估计.

方法 2　利用中心极限定理，解题程序如下：

(1) 判别随机变量(序列)是属于伯努利分布，还是独立同分布，并求出数学期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$；

(2) 标准化随机变量

$$U=\frac{\overline{X}-EX}{\sqrt{DX}}=\begin{cases}\dfrac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}, & X_i 服从伯努利分布\\[2ex] \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}, & X_i 服从独立同分布\end{cases}$$

(3) 由中心极限定理得 $P\{U\leqslant x\}\approx\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$.

常用形式：

$$P\{a<\eta_n<b\}=\Phi\left[\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]-\Phi\left[\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$$

$$P\{|\eta_n|<\varepsilon\}=2\Phi\left[\frac{\varepsilon-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]-1$$

例 1 设随机变量 X 的数学期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant$______.

解：令 $\varepsilon=3\sigma$，则由切比雪夫不等式 $P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$，有

$$P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}$$

例 2 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_{50}$ 为取自 X 的一个简单随机样本，则 $P\{|\overline{X}|>0.02\}=$______. 其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{50}X_i$.

解：

$$\begin{aligned}P\{|\overline{X}|>0.02\}&=1-P\{|\overline{X}|\leqslant 0.02\}\\&=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}-E\overline{X}}{\sqrt{E\overline{X}}}\right|\leqslant\frac{0.02-E\overline{X}}{\sqrt{D\overline{X}}}\right\}\end{aligned}$$

$$E\overline{X}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}EX=EX=\int_{-1}^{1}x\,|x|\,dx=0$$

$$D\overline{X}=D\left(\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}X_i\right)=\frac{1}{50^2}\sum_{i=1}^{50}DX=\frac{1}{50^2}\times 50\times\int_{-1}^{1}x^2\,|x|\,dx=\frac{1}{50^2}\times 50\times\frac{1}{2}=\frac{1}{100}$$

于是

$$\begin{aligned}P\{|\overline{X}|>0.02\}&=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}}{\frac{1}{10}}\right|\leqslant\frac{0.02}{\frac{1}{10}}\right\}\\&=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}}{\frac{1}{10}}\right|\leqslant 0.2\right\}\approx 1-[2\Phi(0.2)-1]=0.84\end{aligned}$$

例 3 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中 n 为正整数，试证：$P(0<X<2(n+1))\geqslant\dfrac{n}{n+1}$.

证：随机变量 X 的期望和方差为

$$EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(n+2)}{n!}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$$

$$EX^2=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(n+3)}{n!}=\frac{(n+2)!}{n!}=(n+1)(n+2)$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=(n+1)(n+2)-(n+1)^2=n+1$$

故由切比雪夫不等式，得

$$P(0<X<2(n+1))=P(|X-(n+1)|<n+1)\geqslant 1-\frac{n+1}{(n+1)^2}=\frac{n}{n+1}$$

例 4 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量列，且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$ 的指数分布，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

解：由题设，$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同服从参数为$\lambda(\lambda>1)$的指数分布，知

$$EX_i=\frac{1}{\lambda},\quad DX_i=\frac{1}{\lambda^2}\quad(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$$

于是

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{n}{\lambda},\quad D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{n}{\lambda^2}$$

由中心极限定理知，当$n\to\infty$时，随机变量

$$U=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}=\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}$$

其极限分布服从标准正态分布，即

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$$

故应选(C).

例 5　某厂生产的玻璃杯的合格率为 0.8，每箱中装有 5 只玻璃杯，检验员从每箱中任取 2 个玻璃杯进行检验，仅当它们都合格时，才认为这一箱合格可出厂. 现有 100 箱这样的玻璃杯，用中心极限定理计算至少有 71 箱可出厂的概率. ($\Phi(0.6)=0.725\ 7$)

解：记 X 为这 100 箱玻璃杯可出厂的箱数，则 $X\sim B(100,p)$. 其中 p 为任取一箱可出厂的概率，显然 $p=(0.8)^2=0.64$，于是由棣莫弗-拉普拉斯定理可得

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 71)&=1-P(0\leqslant X\leqslant 70)\\&=1-P\left(\frac{0-100\times p}{\sqrt{100\times p\times(1-p)}}\leqslant\frac{X-100\times p}{\sqrt{100\times p\times(1-p)}}\leqslant\frac{70-100\times p}{\sqrt{100\times p\times(1-p)}}\right)\\&=1-P\left(-13.33\leqslant\frac{X-100\times p}{\sqrt{100\times p\times(1-p)}}\leqslant 0.6\right)\\&\approx 1-[\Phi(0.6)-\Phi(-13.33)]=0.274\ 3\end{aligned}$$

例 6　计算机做加法时，先对加数取整(取最靠近该数的整数)，设所有的取整误差是相互独立的随机变量，且都在区间[−0.5,0.5]上服从均匀分布，求 300 个数相加时误差综合的绝对值小于 10 的概率. ($\Phi(2)=0.977\ 2$)

解：记 X_i 为第 i 个数的取整误差，则 $X_i\sim U[-0.5,0.5](i=1,2,\cdots,300)$，于是

$$EX_i=0,\quad DX_i=\frac{1}{12}$$

又 $X_1,X_2,\cdots,X_{300}$ 相互独立，则由独立同分布的林德伯格-莱维定理有

$$P\{\left|\sum_{i=1}^{300}X_i\right|<10\}=P\{-10<\sum_{i=1}^{300}X_i<10\}=P\{-10\leqslant\sum_{i=1}^{300}X_i\leqslant 10\}$$

$$=P\left\{\frac{-10-300\times 0}{\sqrt{300\times\frac{1}{10}}}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{300}X_i-300\times 0}{\sqrt{300\times\frac{1}{10}}}\leqslant\frac{10-300\times 0}{\sqrt{300\times\frac{1}{10}}}\right\}$$

$$=P\left\{-2\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{300}X_i-300\times 0}{\sqrt{300\times\frac{1}{10}}}\leqslant 2\right\}$$

$$\approx\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1=0.954\ 4$$

例 7 某种电器元件的寿命(单位:小时)服从数学期望为 100(小时)的指数分布,现随机取 16 只,设它们的寿命是相互独立的,求这 16 只元件的寿命总和大于 1 920 小时的概率. ($\Phi(0.8)=0.788\ 1$)

解: 以 $X_i(i=1,2,\cdots,16)$表示第 i 只电器元件的寿命,则由条件知它们独立同分布,且

$$X_i\sim P\left(\frac{1}{100}\right),\quad EX_i=100,\quad DX_i=100^2$$

$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$相互独立,于是,由中心极限定理有

$$P\{\sum_{i=1}^{16}X_i>1\ 920\}=1-P\{0\leqslant\sum_{i=1}^{16}X_i\leqslant 1\ 920\}$$

$$=1-P\left\{\frac{0-16\times 100}{\sqrt{16\times 100^2}}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{16}X_i-16\times 100}{\sqrt{16\times 100^2}}\leqslant\frac{1\ 920-16\times 100}{\sqrt{16\times 100^2}}\right\}$$

$$=1-P\left\{-4\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{16}X_i-16\times 100}{\sqrt{16\times 100^2}}\leqslant 0.8\right\}$$

$$\approx 1-[\Phi(0.8)-\Phi(-4)]=0.211\ 9$$

例 8 一保险公司有 10 000 人投保,每人每年付 12 元保险费. 已知一年内投保人死亡率为 0.006,如死亡,公司付给死者家属 1 000 元,求:

(1) 保险公司年利润为 0 的概率;

(2) 保险公司年利润不少于 60 000 的概率.

解: 设 X 为投保 10 000 人中一年内死亡的人数,则 $X\sim B(10\ 000,0.006)$,且

$$EX=10\ 000\times 0.006=60,\quad DX=10\ 000\times 0.006\times(1-0.006)=59.64$$

(1) 设保险公司的利润为Y,则

$$Y=10\ 000\times 12-1\ 000X=0\Rightarrow X=120$$

由泊松定理得

$$P\{X=120\}=\frac{60^{120}}{120!}e^{-60}\approx 0$$

(2) $$P\{Y\geqslant 60\ 000\}=P\{10\ 000\times 12-1\ 000X\geqslant 60\ 000\}$$

$$=P\{0\leqslant X\leqslant 60\}$$

$$= P\left\{\frac{0-60}{\sqrt{59.64}} \leqslant \frac{X-60}{\sqrt{59.64}} \leqslant \frac{60-60}{\sqrt{59.64}}\right\}$$

$$= \Phi(0) - \Phi\left(\frac{-60}{\sqrt{59.64}}\right) = 0.5$$

题型 195　与大数定律有关的命题

思路启迪： 熟悉三个大数定律的条件和结论.

例 9　设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，且它不服从辛钦大数定律，则(　　).

(A) X_i 服从参数为 1 的泊松分布　　(B) X_i 服从同一离散型分布

(C) X_i 服从标准正态分布 $N(0,1)$　　(D) X_i 在区间$(0,1)$上服从均匀分布

解： 根据辛钦大数定律的条件和结论，$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布且数学期望存在，而离散型随机变量未必有数学期望，故应选(B).

例 10　假设随机变量列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且服从参数为 λ 的泊松分布，则下面的随机变量序列中不满足切比雪夫大数定律条件的是(　　).

(A) $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$　　(B) $X_1+1, X_2+2, \cdots, X_n+n, \cdots$

(C) $X_1, 2X_2, \cdots, nX_n, \cdots$　　(D) $X_1, \frac{1}{2}X_2, \cdots, \frac{1}{n}X_n, \cdots$

解： 切比雪夫大数定律的条件有三个.

第一个条件要求构成随机变量序列的各随机变量是相互独立的，显然四个备选项均符合条件.

第二个条件要求各随机变量的期望与方差都存在，因为

$$EX_n = \lambda, DX_n = \lambda; \qquad E(X_n+n) = \lambda+n, D(X_n+n) = \lambda$$

$$E(nX_n) = n\lambda, D(nX_n) = n^2\lambda; \quad E\left(\frac{1}{n}X_n\right) = \frac{\lambda}{n}, D\left(\frac{1}{n}X_n\right) = \frac{\lambda}{n^2}$$

则四个备选项均符合条件.

第三个条件是方差 $DX_1, DX_2, \cdots, DX_n, \cdots$ 有公共上界，即 $DX_n < c$，c 是与 n 无关的常数，则对于(A)，$DX_n = \lambda < \lambda+1$；对于(B)，$D(X_n+n) = \lambda < \lambda+1$；对于(C)，$D(nX_n+n) = n^2\lambda$，无公共上界；对于(D)，$D\left(\frac{1}{n}X_n\right) = \frac{1}{n^2}\lambda < \lambda+1$.

综上分析，只有(C)中方差不满足方差一致有界的条件，故选(C).

题型 196　试验次数 n 的确定

思路启迪： 一般利用中心极限定理求解 n. 解题程序如下.

(1) 随机变量的不等式关系为

$$a < X \leqslant n \Rightarrow \frac{a-EX}{\sqrt{DX}} < \frac{X-EX}{\sqrt{DX}} \leqslant \frac{n-EX}{\sqrt{DX}}$$

(2)
$$P\{a < X \leqslant n\} = P\left\{\frac{a-EX}{\sqrt{DX}} < \frac{X-EX}{\sqrt{DX}} \leqslant \frac{n-EX}{\sqrt{DX}}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{n-\mathrm{E}X}{\sqrt{DX}}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mathrm{E}X}{\sqrt{DX}}\right)\geqslant p_0$$

(3) 查正态分布表,解不等式,得出 n 值.

例 11 一个复杂系统由 100 个相互独立的元件组成,在系统运行期间,每个元件损坏的概率均为 0.1. 又知为使系统正常运行,至少需要 85 个元件工作. 求:

(1) 系统的可靠度(即正常运行的概率);

(2) 上述系统假如由 n 个相互独立的元件组成,而且又要求至少有 80%的元件工作才能使整个系统正常运行,问 n 至少为多大时,才能保证系统的可靠度为 0.95?

解:(1) 设

$$X_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 个元件没有损坏\\0, & 第\ i\ 个元件损坏\end{cases}$$

X 为系统正常运行时完好的元件个数,则 $X=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$, X_i 服从 0-1 分布,且

$$X=\sum_{i=1}^{100}X_i\sim B(100,0.9)$$

于是 $$\mathrm{E}X=100\times0.9=90,\quad DX=100\times0.9\times0.1=9$$

故所求概率为

$$P\{X\geqslant85\}=1-P\{X<85\}=1-P\left\{\frac{X-90}{\sqrt9}<\frac{85-90}{\sqrt9}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-90}{\sqrt9}<-\frac53\right\}\approx1-\Phi\left(-\frac53\right)=0.952$$

(2) 如(1)所设,则 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,0.9)$. 于是

$$\mathrm{E}X=n\times0.9=0.9n,\quad DX=n\times0.9\times0.1=0.09n$$

所以 $$P\{X\geqslant0.8n\}=1-P\{X<0.8n\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-0.9n}{0.3\sqrt n}<\frac{0.8n-0.9n}{0.3\sqrt n}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-0.9n}{0.3\sqrt n}<-\frac{\sqrt n}{3}\right\}$$

$$\approx1-\Phi\left\{-\frac{\sqrt n}{3}\right\}=\Phi\left\{\frac{\sqrt n}{3}\right\}$$

查 $\Phi\left\{\frac{\sqrt n}{3}\right\}=0.95\Rightarrow\frac{\sqrt n}{3}=1.65$,则 $n=24.5$,故取 $n=25$.

例 12 假设某单位交换台有 n 部分机,k 条外线,每部分机呼叫外线的概率为 p.

(1) 设 $n=200,k=30,p=0.12$. 试求每部分机呼叫外线时都能及时得到满足的概率$1-\alpha$.

(2) 设 $n=200,p=0.12$,问为使每部分机呼叫外线时都能及时得到满足的概率 $1-\alpha\geqslant$ 95%,至少需要设置多少条外线?

(3) 设 $k=30,p=0.12$,问为使每部分机呼叫外线时都能及时得到满足的概率 $1-\alpha\geqslant$

95%，最多可以容纳多少部分机？

解：设 v_n 为 n 部分机同时呼叫外线的分机数，k 为外线条数，则 $v_n \sim B(n,p)$. 当 n 充分大时，根据棣莫弗-拉普拉斯定理，则

$$U_n = \frac{v_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

(1) $n=200, k=30, p=0.12$，于是

$$np = 200 \times 0.12 = 24, \quad np(1-p) = 200 \times 0.12 \times (1-0.12) = 21.12$$

所以每部分机呼叫外线时能及时得到满足的概率

$$\begin{aligned} 1-\alpha = P\{v_n \leqslant 30\} &= P\left\{\frac{v_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{30-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{v_n - 24}{\sqrt{21.12}} \leqslant \frac{30-24}{\sqrt{21.12}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{30-24}{\sqrt{21.12}}\right) = \Phi(1.31) \approx 0.904\ 9 \end{aligned}$$

(2) $n=200$, $p=0.12$, k 表示至少需要设置的外线条数，于是

$$np = 200 \times 0.12 = 24, \quad np(1-p) = 200 \times 0.12 \times (1-0.12) = 21.12$$

所以每部分机呼叫外线时能及时得到满足的概率

$$\begin{aligned} 1-\alpha = P\{v_n \leqslant k\} &= P\left\{\frac{v_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{v_n - 24}{\sqrt{21.12}} \leqslant \frac{k-24}{\sqrt{21.12}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{k-24}{\sqrt{21.12}}\right) \geqslant 0.95 \end{aligned}$$

故 $\frac{k-24}{\sqrt{21.12}} \geqslant 1.644\ 9 \Rightarrow k \geqslant 31.56$，即至少需要设置 32 条外线.

(3) $k=30, p=0.12$，于是

$$np = n \times 0.12 = 0.12n, \quad np(1-p) = n \times 0.12 \times (1-0.12) = 0.105\ 6n$$

所以每部分机呼叫外线时能及时得到满足的概率

$$\begin{aligned} 1-\alpha = P\{v_n \leqslant 30\} &= P\left\{\frac{v_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{30-0.12n}{\sqrt{0.105\ 6n}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{30-0.12n}{\sqrt{0.105\ 6n}}\right) \geqslant 0.95 \end{aligned}$$

所以 $\frac{30-0.12n}{\sqrt{0.105\ 6n}} \geqslant 1.644\ 9$，由此得一元二次方程 $0.014\ 4n^2 - 7.485\ 7n + 900 = 0$，解之得

$$n_1 = 188.797\ 2, \quad n_2 = 3\ 310\ 431 \quad (\text{增根})$$

故最多可以容纳 188 部分机.

第 25 章 数理统计

●重要定理、公式和结论

25.1 常用统计量

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的样本，

(1) 样本均值：$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；

(2) 样本方差：$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；

(3) 样本标准差：$S=\sqrt{S^2}$；

(4) 样本 k 阶矩：$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$；

(5) 样本 k 阶中心矩：$B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$；

(6) 次序统计量：设样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的观测值为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，现将观测值按由小到大的顺序重新排列得到 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$，记取值为 $x_{(k)}$ 的样本分量为 $X_{(k)}$，则称 $X_{(1)}$，$X_{(2)}$，$\cdots$，$X_{(n)}$为样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的次序统计量.

注： 统计量为不含任何参数的样本函数.

25.2 三个常见的抽样分布：χ^2 分布、t 分布和 F 分布

1. χ^2 分布

设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim N(0,1)$，则 $\chi^2=X_1^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$.

(1) 概率密度：$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$.

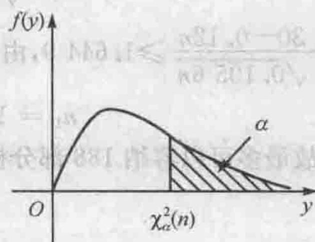


图 25-1

(2) 图像见图 25-1. 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y=\alpha$$

的点 $\chi_\alpha^2(n)$为 $\chi^2(n)$分布的上 α 分位点.

(3) 性质：

① 设 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，则 $\mathrm{E}\chi^2=n$，$D\chi^2=2n$；

② 设 $\xi\sim\chi^2(m)$，$\eta\sim\chi^2(n)$，且 ξ,η 相互独立，则 $\xi+\eta\sim\chi^2(m+n)$.

2. t 分布

设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，则

$$t=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}\sim t(n)$$

(1) 概率密度：$\varphi(x)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$. 图像见图 25－2.

(2) 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上 α 分位点.

(3) 性质：

① 设 $t\sim t(n)$，则 $Et=0$，$Dt=\dfrac{n}{n-2}$，$n>2$；

② $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. F 分布

设 $X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，则

$$F=\frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}\sim F(m,n)$$

(1) 概率密度 $\psi(y)$ 的图像见图 25－3.

(2) 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty}\psi(y)\,\mathrm{d}y=\alpha$$

的点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 分布的上 α 分位点.

(3) 性质：设 $\xi\sim F(m,n)$，则 $\dfrac{1}{\xi}\sim F(n,m)$.

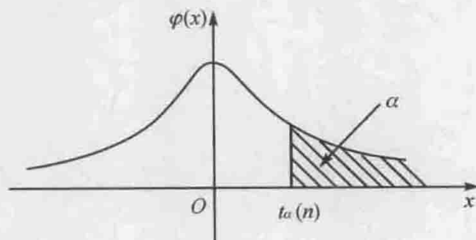


图 25－2

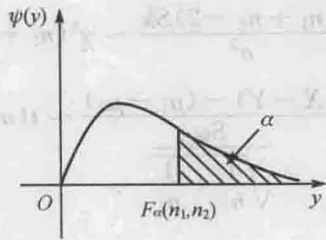


图 25－3

25.3 正态总体条件下样本均值和样本方差的分布

1. 单个正态总体

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为取自 X 的样本，则

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

(1) $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2\right)$或$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$；

(2) $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$；

(3) $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

2. 两个正态总体

设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$；$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 是分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$的简单随机样本，且相互独立，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\quad \overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$$

$$S_x^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_y^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$$

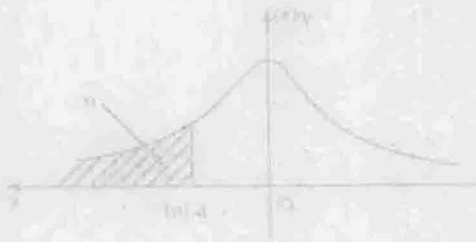
$$S_W^2=\frac{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}$$

则

(1) $\frac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$；

(2) $\frac{(n_1+n_2-2)S_W^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$；

(3) $\frac{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-1)$.



25.4 数理统计中的重要结论

数理统计中的重要结论包括：

(1) 统计量是随机变量，本身不含总体分布中的未知参数，但它的分布可能含总体分布中的未知参数.

(2) 样本$(X_1,\cdots,X_n)$取自总体X，即表示$X_i(i=1,2,\cdots,n)$相互独立且与X同分布.

(3) 样本$(X_1,\cdots,X_n)$的联合分布.

若总体X为一个连续型随机变量，密度函数为$f_X(x)$，则样本$(X_1,\cdots,X_n)$的联合密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i)$$

若总体X为一个离散型随机变量，分布律为$P(X=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots,n)$，则样本$(X_1,\cdots,X_n)$的联合分布律为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$$

(4) 样本的数字特征.

无论总体X服从什么分布，只要有$(X_1,\cdots,X_n)$来自X，且

$$EX=\mu,\quad DX=\sigma^2$$

则

① $E\overline{X}=\mu,D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$；

② $ES^2=\sigma^2,ES^{*2}=\frac{n-1}{n}\sigma^2$，其中$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

25.5 参数估计的重要结论

参数估计的重要结论包括：

(1) $\overline{X},S^2$是EX,DX的无偏、一致估计量，$E\overline{X}=EX,ES^2=DX$；

(2)$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是$DX$的最大似然估计量；

(3) 样本的任意k阶原点矩均是对应的总体k阶原点矩的一致估计量；

(4) 若$\hat{\theta}$为θ的无偏估计，且$D\hat{\theta}\to 0(n\to\infty)$，则$\hat{\theta}$为$\theta$的一致估计；

(5) 若$\hat{\theta}$为θ的矩估计，$g(x)$为连续函数，则$g(\hat{\theta})$为$g(\theta)$的矩估计；

(6) 若$\hat{\theta}$为θ的最大似然估计，$g(x)$为单调函数，则$g(\hat{\theta})$为$g(\theta)$的最大似然估计.

25.6 假设检验的重要结论

1. 单个正态总体(显著性水平为α)

设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,\cdots,X_n)$为来自总体X的简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值，S^2是样本

方差.

(1) 正态总体均值的检验如表 25-1 所列.

表 25-1

情 形	检验统计量	假 设		拒绝域
		H_0	H_1	
σ^2 已知				
1	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert U\rvert\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$
2		$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$U\geqslant u_\alpha$
3		$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$U\leqslant -u_\alpha$
σ^2 未知				
1	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert t\rvert\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
2		$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$t\geqslant t_\alpha(n-1)$
3		$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$t\leqslant -t_\alpha(n-1)$

(2) 正态总体方差的检验如表 25-2 所列.

表 25-2

情 形	检验统计量	假 设		拒绝域
		H_0	H_1	
μ 已知				
1	$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$
2		$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n)$
3		$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n)$
μ 未知				
1	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
2		$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n-1)$
3		$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

2. 两个正态总体(显著性水平为 α)

设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. $(X_1,\cdots,X_m)$, $(Y_1,\cdots,Y_n)$为来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, $\overline{X}$, $\overline{Y}$ 是样本均值, S_x^2, S_y^2 是样本方差, S_{xy}^2 是联合样本方差.

(1) 两个正态总体均值差的检验如表 25-3 所列.

表 25-3

情　形	检验统计量	假　设		拒绝域
		H_0	H_1	
σ_1^2,σ_2^2 已知				
1	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$	$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$\|U\|\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$
2		$\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$	$U\geqslant u_\alpha$
3		$\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$	$U\leqslant -u_\alpha$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知				
1	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$	$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$\|t\|\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$
2		$\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$	$t\geqslant t_\alpha(m+n-2)$
3		$\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$	$t\leqslant -t_\alpha(m+n-2)$

(2) 两个正态总体方差比的检验如表 25-4 所列.

表 25-4

情　形	检验统计量	假　设		拒绝域
		H_0	H_1	
μ_1,μ_2 未知				
1	$F=\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\sim F(m-1,n-1)$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$ 或 $F\leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$
2		$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F\geqslant F_\alpha(m-1,n-1)$
3		$\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F\leqslant F_{1-\alpha}(m-1,n-1)$

3. 两类错误

(1) 第一类错误：H_0 本来是正确的，由于样本的随机性，样本观察值落入拒绝域而做出了拒绝 H_0 的选择，即 $\alpha=P($拒绝 $H_0\mid H_0$ 为真$)$.

(2) 第二类错误：H_0 本来不是正确的，由于样本的随机性，样本观察值落入接受域而做出了接受 H_0 的选择，即 $\beta=P($接受 $H_0\mid H_0$ 为假$)$.

● 核心题型及思路启迪

25.7　统计量的基本概念

题型 197　求统计量的分布及概率

思路启迪：(1) 应熟悉三种重要抽样分布：χ^2 分布、t 分布和 F 分布所对应的随机变量的结构和正态总体的抽样分布，对 χ^2 分布注意样本的独立性.

(2) 求概率时，先将统计量转化为可以查表的形式，即标准正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布，然后查表求解.

例 1　设 $\overline{X}$ 和 S^2 分别为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本均值和样本方差，样本容量为 n，则 $\frac{n(\overline{X})^2}{S^2}$ 服从______分布.

解：$\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\sigma^2\right)$，则 $\frac{\overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，所以 $\left[\frac{\overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right]^2\sim\chi^2(1)$.

又 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，于是由 F 分布的定义可得

$$\frac{n(\overline{X})^2}{S^2}=\frac{\frac{\left(\frac{\overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2}{1}}{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}\sim F(1,n-1)$$

例 2　设 $X_1,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6),\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,\quad Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$$

证明：$Z\sim t(2)$.

证：由题设可知，Y_1,Y_2 都服从正态分布，且相互独立，所以 Y_1-Y_2 也服从正态分布.

因为
$$E(Y_1-Y_2)=EY_1-EY_2=\mu-\mu=0$$
$$D(Y_1-Y_2)=DY_1+DY_2=\frac{1}{6}\sigma^2+\frac{1}{3}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2$$

所以
$$\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{\frac{1}{2}\sigma^2}}=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}\sim N(0,1)$$

此外，$\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$，并且由 Y_1 与 S^2 和 Y_2 与 S^2 都是相互独立可知，Y_1-Y_2 与 S^2 相互独立，从而 $\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}$ 与 $\frac{2S^2}{\sigma^2}$ 相互独立，于是由 t 分布定义得

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{2S^2}{\sigma^2}}{2}}}\sim t(2)$$

例 3　设 $X_1,\cdots,X_{n_1};Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 是分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$ 的简单随机样本，且相互独立，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\quad \overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$$

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$$

$$S_W^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

求统计量 $S^2=\frac{(n_1+n_2-2)S_W^2}{\sigma^2}$ 所服从的分布.

解: 由 $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1)$, $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$, 且 S_1^2,S_2^2 相互独立知, $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}$, $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}$ 相互独立,从而由 χ^2 分布的可加性得

$$S^2=\frac{(n_1+n_2-2)S_W^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

题型 198 求统计量的数字特征

思路启迪: 统计量也是随机变量,所以求统计量的数字特征的方法同前. 常用统计量的数字特征如下.

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 来自 X, 且 $EX=\mu, DX=\sigma^2$, 则

$$E\overline{X}=\mu,\quad D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n},\quad E(S^2)=\sigma^2\quad\left(S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)$$

特别,当 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 时, $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2\right)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

并且 $\overline{X},S^2$ 相互独立, $E\overline{X}=\mu$, $D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$, $ES^2=\sigma^2$, $DS^2=\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

例 4 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的样本,令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$, 试求 EY,DY.

分析: 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,从而 $|X_1-\mu|,|X_2-\mu|,\cdots,|X_n-\mu|$ 也独立同分布,于是根据数字特征的性质,只须求 $E|X_i-\mu|$, $D|X_i-\mu|$.

解: 令 $Y_i=|X_i-\mu|$, 则 $Y_i\sim N(0,\sigma^2)$. 于是

$$E|X_i-\mu|=E|Y_i|=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=2\int_0^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

故

$$EY=E|X_i-\mu|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

而 $D|X_i-\mu|=D|Y_i|=EY_i^2-(E|Y_i|)^2=DY_i+(EY_i)^2-\frac{2}{\pi}\sigma^2=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2$

故 $DY=\frac{1}{n}D|X_i-\mu|=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\sigma^2}{n}$.

例 5 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geqslant 2)$，其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 EY 和方差 DY.

解：对 $i=1,2,\cdots,n$，记 $Y_i=X_i+X_{n+i}$，则 $Y_i\sim N(2\mu,2\sigma^2)$，且 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立，有

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=2\cdot\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$$

所以

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

因此

$$EY=E\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]=2\sigma^2E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$=2\sigma^2\cdot(n-1)=2(n-1)\sigma^2$$

$$DY=D\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]=4\sigma^4D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$=4\sigma^4\cdot 2(n-1)=8(n-1)\sigma^4$$

例 6 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

求 DT.

解：由 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立知，$\overline{X}^2$ 与 S^2 也相互独立，于是有

$$DT=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)$$

由于 $\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$，所以 $\frac{\overline{X}^2}{\frac{1}{n}}\sim\chi^2(1)$，从而

$$D(\overline{X}^2)=\left(\frac{1}{n}\right)^2D\left(\frac{\overline{X}^2}{\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{n^2}$$

由 $(n-1)S^2\sim\chi(n-1)$ 知，

$$DS^2=\frac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2]=\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2}{n-1}$$

故

$$DT=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^2(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}$$

例 7 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$ 是来自总体 X 的容量为 $n+1$ 的简单随机样本，令随机变量

$$Y_i=X_i-\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}X_i\quad(i=1,2,\cdots,n+1)$$

试求 Y_i 的概率密度.

解: 将 Y_i 表示为

$$Y_i=\frac{n}{n+1}X_i-\frac{1}{n+1}(X_1+X_2+\cdots+X_{i-1}+X_{i+1}+\cdots+X_{n+1})$$

则 Y_i 是 $n+1$ 个独立变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$ 的线性组合,而 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$,所以 Y_i 服从正态分布,其数学期望和方差分别是

$$EY_i=EX_i-\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}EX_i=\mu-\mu=0$$

$$DY_i=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2DX_i+\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}DX_j$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\sigma^2+\frac{n}{(n+1)^2}\sigma^2=\frac{n}{n+1}\sigma^2$$

即 Y_i 服从正态分布 $N\left(0,\frac{n}{n+1}\sigma^2\right)$,其概率密度为

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sigma}e^{-\frac{(n+1)y^2}{2n\sigma^2}}\quad(-\infty<y<+\infty)$$

例 8　设 X_1,X_2 是来自总体 X 的简单随机样本,$\overline{X}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}X_i,S^2=\sum_{i=1}^{2}(X_i-\overline{X})^2$ 分别为样本的均值和方差,$Y=\sqrt{X_1X_2}$,证明:

(1) 当 X 服从数学期望为 θ 的指数分布时,$EY=\frac{\pi}{4}\theta$;

(2) 当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时,$E[(\overline{X}S^2)^2]=3\sigma^4\left(\frac{\sigma^2}{2}+\mu^2\right)$.

解: (1) 由 X_1,X_2 相互独立知,$\sqrt{X_1},\sqrt{X_2}$ 也相互独立,所以

$$EY=E(\sqrt{X_1})E(\sqrt{X_2})=(E\sqrt{X})^2$$

由于 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

所以　$$E\sqrt{X}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{t}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{x}{\theta}}}\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}E(T^2)\quad(\text{其中 }T\sim N(0,1))$$

$$=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}[DT+(ET)^2]=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

由此证得 $EY=\left(\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}\theta$.

(2) 由 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立知,$\overline{X}^2$ 与 S^4 也相互独立,从而

$$E[(\overline{X}S^2)^2]=E(\overline{X}^2S^4)=E(\overline{X}^2)E(S^4)\tag{1}$$

由于 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{2}\sigma^2\right)$，所以

$$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{1}{2}\sigma^2+\mu^2 \tag{2}$$

此外，由

$$S^2=(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2=\frac{1}{4}[(X_1-X_2)^2+(X_2-X_1)^2]=\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2$$

和 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$ 知，

$$\frac{S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{2\sigma^2}(X_1-X_2)^2\sim\chi^2(1)$$

从而

$$E(S^4)=\sigma^4E\left(\frac{S^4}{\sigma^4}\right)=\sigma^4\left\{D\left(\frac{S^2}{\sigma^2}\right)+\left[E\left(\frac{S^2}{\sigma^2}\right)\right]^2\right\}=\sigma^4(2+1^2)=3\sigma^4 \tag{3}$$

将式(2)，(3)代入式(1)可得

$$E[(\overline{X}S^2)^2]=3\sigma^4\left(\frac{\sigma^2}{2}+\mu^2\right)$$

25.8 参数估计

题型 199 求参数的点估计(矩估计和最大似然估计)

思路启迪：(1) 对于矩估计，由 $EX^k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$（总体矩＝样本矩）得出的解 $\hat{\theta}_k(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ_k 的矩估计量. 一般只要掌握 $m=1$，2 的情形，如下：

① 一个参数：$EX=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$；

② 两个参数：$\begin{cases}EX^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\\ EX=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}\end{cases}$.

如 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 μ,σ^2 的矩估计量为 $\hat{\mu}=\overline{X}$，$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，将样本值代入即可求得矩估计值.

(2) 对于最大似然估计，求解步骤是：

① 写出似然函数.

若 X 为离散型，且概率分布为 $P(X=x)=p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$（其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 为待估参数）时，似然函数取为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta_1,\cdots,\theta_m)$$

若 X 为连续型，且概率密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$（其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 为待估参数）时，似然函数取为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta_1,\cdots,\theta_m)$$

② 取对数 $\ln L$.

③ 对 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 求偏导数 $\frac{\partial L}{\partial\theta_i}(i=1,\cdots,m)$.

④ 判断方程组 $\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0$ 是否有解. 若有解，则其解即为所求最大似然估计；若无解，则最大似然估计常在 θ_i 的边界点上达到.

例 9　设总体 X 的概率分布如表 25-5 所列：

表 25-5

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数，利用 X 的如下样本值：3,1,3,0,3,1,2,3，求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解：

$$EX=0\cdot\theta^2+1\cdot2\theta(1-\theta)+2\cdot\theta^2+3(1-2\theta)=3-4\theta$$

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$$

令 $EX=\bar{x}$，得 $3-4\theta=2$，得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

似然函数

$$\begin{aligned}L(\theta)&=P(X_1=3,X_2=1,\cdots,X_8=3)\\&=P(X_1=3)P(X_2=1)\cdots P(X_8=3)\\&=P(X=3)P(X=1)\cdots P(X=3)\\&=(1-2\theta)\cdot2\theta(1-\theta)\cdots(1-2\theta)\\&=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4\end{aligned}$$

两边取对数后得

$$\ln\theta=\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$$

令 $\frac{d\ln\theta}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0$，则该方程的根为 $\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

例 10　设某种电子元件的寿命 X（单位：小时）服从双参数的指数分布，其概率密度为

$$f(x,\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中 $\theta,\mu(\theta,\mu>0)$ 为未知参数. 自一批这种器件中随机取 n 件进行寿命试验，设它们的失效时间分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 θ,μ 的最大似然估计量.

解：似然函数为

$$L(\mu,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}},\quad x_i\geqslant\mu$$

取对数得

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\left(-\ln\theta-\frac{x_i-\mu}{\theta}\right)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right]$$

则 $$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\frac{n}{\theta},\quad\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right]$$

可见 $$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\frac{n}{\theta}>0\quad(\mu\leqslant x_i;i=1,2,\cdots,n)$$

所以当 $\mu=\min(x_1,\cdots,x_n)$ 时，$\ln L$ 取最大值.

由 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right]=0$ 可得 $\theta=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\mu$.

于是 μ,θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\mu}=\min(X_1,\cdots,X_n),\quad\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\hat{\mu}=\overline{X}-\min(X_1,\cdots,X_n)$$

例 11 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha\\ 0, & x\leqslant\alpha\end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，

(1) 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量；

(2) 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量；

(3) 当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计量.

解：当 $\alpha=1$ 时，X 的概率密度为

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$$

(1) 由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}$$

令 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得 $\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

所以，参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(2) 对于总体 X 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i>1(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当 $x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\beta)>0$，取对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

对 β 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}[\ln L(\beta)]}{\mathrm{d}\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\beta)]}{\mathrm{d}\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 $\beta=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

于是 β 的最大似然估计量为

$$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

(3) 当 $\beta=2$ 时，X 的概率密度为

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha\\ 0, & x\leqslant\alpha\end{cases}$$

对于总体 X 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}, & x_i>\alpha(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当 $x_i>\alpha(i=1,2,\cdots,n)$ 时，α 越大，$L(\alpha)$ 越大，即 α 的最大似然估计值为

$$\hat{\alpha}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

于是 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

题型 200　讨论参数估计的性质

思路启迪： (1) 考虑总体参数估计量的无偏估计时，先计算这个估计量的数学期望，然后根据无偏性的定义（设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，若 $E\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计）进行判断.

(2) 考虑总体同一个参数的若干个估计量的有效性时，应先确定它们都为无偏估计量，然后根据有效性的定义（设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计，即 $E\hat{\theta}_1=\theta,E\hat{\theta}_2=\theta$，若 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效）进行判断.

(3) 一致性一般用大数定律判断. 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，若 $\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}\theta(n\to\infty)$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量.

例 12 假设总体 X 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，如果分别以 $\hat{a}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{b}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 作为总体 X 的未知参数的估计量，问 $\hat{a},\hat{b}$ 是否为无偏估计量.

解： 由题设知，X 的概率密度与分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

由此得 $\hat{a}$ 的分布函数与概率密度分别为

$$\begin{aligned}F_{\hat{a}}&=P(\hat{a}\leqslant x)=P(\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant x)\\&=1-P(X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x)\\&=1-P(X_1>x)P(X_2>x)\cdots P(X_n>x)\\&=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}0, & x<a\\ 1-\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^n, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & x>b\end{cases}\end{aligned}$$

$$f_{\hat{a}}(x)=\frac{\mathrm{d}F_{\hat{a}}(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\dfrac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$\hat{b}$ 的分布函数与概率密度分别为

$$\begin{aligned}F_{\hat{b}}(x)&=P(\hat{b}\leqslant x)=P(\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant x)\\&=P(X_1\leqslant x,X_2\leqslant x,\cdots,X_n\leqslant x)\\&=P(X_1\leqslant x)P(X_2\leqslant x)\cdots P(X_n\leqslant x)\\&=[F(x)]^n=\begin{cases}0, & x<a\\ \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & x>b\end{cases}\end{aligned}$$

$$f_{\hat{b}}(x)=\frac{\mathrm{d}F_{\hat{b}}(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\dfrac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因此由

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\hat{a}&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{a}}(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\cdot\frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}\mathrm{d}x\\&=\frac{n}{(b-a)^n}\int_a^b[b-(b-x)](b-x)^{n-1}\mathrm{d}x\\&=\frac{n}{(b-a)^n}\int_a^b b(b-x)^{n-1}\mathrm{d}x-\frac{n}{(b-a)^n}\int_a^b(b-x)^n\mathrm{d}x\\&=b-\frac{n}{n+1}(b-a)=\frac{na+b}{n+1}\neq a\end{aligned}$$

知 $\hat{a}$ 不是 a 的无偏估计量.

由 $$E\hat{b}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{b}}(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\cdot\frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}\mathrm{d}x=\frac{a+nb}{n+1}\neq b$$

知 $\hat{b}$ 不是 b 的无偏估计量.

例 13　设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\geqslant\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$，$\theta\in(-\infty,+\infty)$ 为未知参数，而 $X_1,\cdots,X_n$ 为取自 X 的一个样本，证明：

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-1,\quad \hat{\theta}_2=\min(X_1,\cdots,X_n)-\frac{1}{n}$$

是 θ 的两个无偏估计量，并确定哪个更有效.

证： $$\mathrm{E}X=\int_\theta^{+\infty}x e^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta+1,\quad \mathrm{E}X^2=\int_\theta^{+\infty}x^2e^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta^2+2\theta+1$$

则 $$DX=\mathrm{E}X^2-(\mathrm{E}X)^2=1$$

于是 $\mathrm{E}\hat{\theta}_1=\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)-1=\mathrm{E}X-1=\theta$，即 $\hat{\theta}_1$ 为 θ 的无偏估计量.

因为

$$\mathrm{E}\hat{\theta}_2=\mathrm{E}[\min(X_1,\cdots,X_n)]-\frac{1}{n}=\mathrm{E}X_{(1)}-\frac{1}{n},\quad X_{(1)}=\min(X_1,\cdots,X_n)$$

且 $F_{X_{(1)}}(x)=1-[1-F(x)]^n$，所以

$$f_{X_{(1)}}(x)=[1-F(x)]^{n-1}f(x,\theta)=\begin{cases}ne^{-n(x-\theta)}, & x\geqslant\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$$

于是 $\mathrm{E}X_{(1)}=\int_\theta^{+\infty}x\cdot ne^{-n(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta+\frac{1}{n}$，所以 $\mathrm{E}\hat{\theta}_2=\mathrm{E}X_{(1)}-\frac{1}{n}=\theta$，即 $\hat{\theta}_2$ 也为 θ 的无偏估计量.

又 $$D\hat{\theta}_1=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{1}{n}DX=\frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}D\hat{\theta}_2&=D\left[\min(X_1,\cdots,X_n)-\frac{1}{n}\right]=DX_{(1)}=\mathrm{E}X_{(1)}^2-[\mathrm{E}X_{(1)}]^2\\&=\left(\theta+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}-\left(\theta+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

当 $n>1$ 时，$D\hat{\theta}_2<D\hat{\theta}_1$，即 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 更有效.

例 14　设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D\hat{\theta}$；

(3) 讨论 $\hat{\theta}$ 的无偏性和一致性.

解：(1) 因为

$$\mathrm{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\theta$$

所以令 $EX=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，即 $\frac{1}{2}\theta=\overline{X}\Rightarrow\theta=2\overline{X}$，于是得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}$.

(2) 因为
$$D\hat{\theta}=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}DX$$
而
$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{10}\theta^2$$
所以 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{20}\theta^2$，故 $D\hat{\theta}=\frac{1}{5n}\theta^2$.

(3) 因为
$$E\hat{\theta}=E(2\overline{X})=2E(\overline{X})=2EX=\theta$$
所以 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 为 θ 的无偏估计量，又 $D\hat{\theta}=\frac{1}{5n}\theta^2\to0(n\to\infty)$，故 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 为 θ 的一致估计量.

题型 201 参数的区间估计

思路启迪： 作总体参数的区间估计时，总是先选取一个合适的估计函数. 设 θ 是总体的待估参数，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，此时要对 θ 作置信度为 $1-\alpha(\alpha\in(0,1))$ 的区间估计(即求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间)，可按以下步骤进行：

(1) 选取一个合适的估计函数 $W=W(X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta)$，它包含 θ，但不包含其他未知参数，并且能确定 W 的分布，且这个分布与 θ 无关；

(2) 对给定的置信水平 $1-\alpha$，定出两个常数 a,b，使得
$$P(a<W(X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta)<b)=1-\alpha$$

(3) 从 $a<W(X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta)<b$ 得到等价不等式 $\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$，其中 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是统计量，那么 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 就是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

对正态总体来说，其估计函数、置信区间都有公式可循，例如，单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的参数区间估计如表 25-6 所列(其中 $\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差).

(4) 两个正态总体的区间估计.

设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. $(X_1,\cdots,X_m)$ 和 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 为来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，$\overline{X},\overline{Y}$ 是样本均值，S_x^2,S_y^2 是样本方差，S_{xy}^2 是联合样本方差，则两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的参数区间估计如表 25-7 所列.

表 25 - 6

单个正态总体			
待估参数	条　件	估计函数	置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间
μ	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
	σ^2 未知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
σ^2	μ 已知	$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$
	μ 未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

表 25 - 7

两个正态总体			
待估参数	条　件	估计函数	置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\right.$ $\left.\overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right)$
	σ_1^2,σ_2^2 未知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$ $S_W=\dfrac{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{m+n-2}$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_W\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\right.$ $\left.\overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_W\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right)$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$\dfrac{\frac{S_x^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_y^2}{\sigma_2^2}}\sim F(m-1,n-1)$	$\left(\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\cdot\frac{S_x^2}{S_y^2},\right.$ $\left.\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\cdot\frac{S_x^2}{S_y^2}\right)$

例 15　设由来自正态总体 $N(\mu,1^2)$、容量为 100 的简单随机样本，得样本均值 $\overline{X}=5$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为______.

解： 由题设可知，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

又由 $1-\alpha=0.95$ 得 $\alpha=0.05$，则 $u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$.

于是

$$P\left\{-1.96\leqslant\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqslant 1.96\right\}=0.95$$

即 $P\left\{\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant\mu\leqslant\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$，而 $\overline{X}=5,\sigma=1,n=100$，所以 $P\{4.8\leqslant\mu\leqslant5.2\}=0.95$.

故所求置信区间为(4.8,5.2).

例 16 设0.50，1.25，0.80，2.00是来自总体 X 的简单随机样本，已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$，

(1) 求 X 的数学期望 EX(记为 b)；

(2) 求 μ 的置信水平为0.95的置信区间；

(3) 利用上述结果求 b 的置信水平为0.95的置信区间.

解：(1)
$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy=e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu-1)^2}{2}}dy=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

所以 $b=e^{\mu+\frac{1}{2}}$.

(2) 由于 $Y=\ln X$ 服从正态分布，且方差 $\sigma^2=1$ 已知，所以 μ 的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\bar{y}-\frac{1}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{y}+\frac{1}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

其中 $\bar{y}=\frac{1}{4}(\ln 0.50+\ln 1.25+\ln 0.80+\ln 2.00)=0,n=4,u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$，所以所求的置信区间为

$$\left(0-\frac{1}{\sqrt{4}}\times1.96,0+\frac{1}{\sqrt{4}}\times1.96\right)=(-0.98,0.98)$$

(3) 由(2)知 $P(-0.98<\mu<0.98)=0.95$，即

$$P\left(-0.98+0.5<\mu+\frac{1}{2}<0.98+0.5\right)=0.95$$

由此得到 $P(e^{-0.48}<e^{\mu+\frac{1}{2}}<e^{1.48})=0.95$，即 $P(e^{-0.48}<b<e^{1.48})=0.95$.

因此 b 的置信水平为0.95的置信区间为 $(e^{-0.48},e^{1.48})$.

例 17 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 的置信区间长度为 $L=\frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$，其中 $P(t(n-1)\leqslant t_p(n-1))=p$，则置信水平为(　　).

(A) $2\alpha-1$　　(B) $1-2\alpha$　　(C) $1-\frac{\alpha}{2}$　　(D) α

解：由题设可知

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1),\quad L=\frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$$

所以 $$P\left\{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\leqslant\mu\leqslant\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right\}=$$

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|\leqslant t_{\alpha}(n-1)\right\}=2P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\leqslant t_{\alpha}(n-1)\right\}-1=2\alpha-1$$

故应选(A).

例 18 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,8)$，μ 未知. 在 X 的 10 个观测值的平均值 $\bar{x}=1\ 500$ 时，

(1) 求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间；

(2) 要想使 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间的长度不超过 1，则 n 至少取多大？

(3) 如果 X 的观测值的个数 $n=64$，则当区间 $(\overline{X}-1,\overline{X}+1)$ 是 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间时，α 应多大？

解: (1) 由于 $\sigma^2=8$ 已知，所以正态总体数学期望 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x}-\frac{u_{\frac{\alpha}{2}}\times\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{u_{\frac{\alpha}{2}}\times\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

由题设知 $\bar{x}=1\ 500$，$n=10$，$\sigma=\sqrt{8}$，$\mu_{\frac{\alpha}{2}}=\mu_{0.025}=1.96$，所以 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left[1\ 500-\frac{1.96\times\sqrt{8}}{\sqrt{10}},\ 1\ 500+\frac{1.96\times\sqrt{8}}{\sqrt{10}}\right]=(1\ 498,1\ 502)$$

(2) 当观测值个数为 n 时，μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left[1\ 500-\frac{1.96\times\sqrt{8}}{\sqrt{n}},\ 1\ 500+\frac{1.96\times\sqrt{8}}{\sqrt{n}}\right]$$

于是要使该区间的长度不超过 1，即 $2\times\frac{1.96\times\sqrt{8}}{\sqrt{n}}\leqslant 1$，必有 $n\geqslant 122.93$，即观测值个数 n 最少为 123.

(3) 如果 X 的观测值的个数 $n=64$ 时，μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{X}-1,\overline{X}+1)$，则有 $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{64}}u_{\frac{\alpha}{2}}=1$，即 $u_{\frac{\alpha}{2}}=2\sqrt{2}=2.828\ 5$，查 α 分布表可得 $\frac{\alpha}{2}=1-0.997\ 7=0.002\ 3$，即 $\alpha=0.004\ 6$.

例 19 设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均为未知参数. 设随机变量 L 是关于 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度，求 $E(L^2)$，$D(L^2)$.

解: 在正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 σ^2 未知的情况下，μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

由此得到

$$L=\frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}$$

于是

$$E(L^2)=E\left(\frac{4S^2}{n}t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right)$$

$$=\frac{4}{n}t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)E(S^2)=\frac{4}{n}t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\cdot\sigma^2=\frac{4\sigma^2}{n}t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$$

由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 知 $D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1)$，于是

$$D(L^2)=D\left(\frac{4}{n}t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\cdot\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$$

$$=\frac{16}{n^2(n-1)^2}t_{\frac{\alpha}{2}}^4(n-1)\cdot 2(n-1)D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$$

$$=\frac{16}{n^2(n-1)^2}t_{\frac{\alpha}{2}}^4(n-1)\cdot 2(n-1)=\frac{32}{n^2(n-1)}t_{\frac{\alpha}{2}}^4(n-1)$$

例 20 随机地取某种炮弹 9 发做试验,测得炮口速度的样本标准差 $S=11$ m/s. 设炮口速度 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$,求这种炮弹炮口速度的标准差 σ 的 95%的置信区间.

解: $1-\alpha=0.95,\frac{\alpha}{2}=0.025,n=9,S=11.$

取随机变量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,由

$$P\{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)<\chi^2<\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\}=1-\alpha$$

查 χ^2 分布表,得 $\chi_{0.975}^2(8)=17.535,\chi_{0.025}^2(8)=2.18.$

故 σ^2 的 95%的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{8}\times 11}{\sqrt{17.535}},\frac{\sqrt{8}\times 11}{\sqrt{2.18}}\right)=(7.4,21.1)$$

例 21 设 $X_1,\cdots,X_{2n}$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,18)$ 的样本,$Y_1,\cdots,Y_n$ 是来自正态总体 $N(\mu_2,16)$ 的样本,要使 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%置信区间的长度不超过 l,问 n 至少要取多大?

分析: 因为两个总体的方差已知,于是可选用对应的区间估计公式来求得 n.

解: 因为置信区间的下限、上限分别为

$$(\overline{X}-\overline{Y})-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\quad(\overline{X}-\overline{Y})+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$$

于是置信区间的长度为

$$L=2u_{0.975}\sqrt{\frac{18}{2n}+\frac{16}{n}}=\frac{10}{\sqrt{n}}\times 1.96\leqslant l$$

故 $n\geqslant\frac{384.16}{l^2}$,即 n 至少要取 $\left[\frac{384.16}{l^2}\right]+1$,其中[ ]为取整运算,且假定 $\frac{384.16}{l^2}$ 为非整数.

25.9 假设检验

题型 202 正态总体的均值和方差的假设检验

思路启迪: 一般按以下步骤求解:

(1) 根据具体问题做出假设;

(2) 选取相应的检验统计量;

(3) 写出拒绝域或接受域;

(4) 将已知数据代入统计量进行计算,然后做出判断.

例 22 食品厂用自动装罐机装罐头食品,每罐标准质量为 500 g,每隔一定时间需要检验其工作情况,现抽 10 罐,测得其质量(单位:g)为

495,510,505,498,503,492,502,512,497,506

假设质量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,试问机器工作是否正常($\alpha=0.98$)?

解: ① $H_0:\mu=500.$

② 因为 σ^2 未知，所以选取统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{\overline{X}-500}{\frac{S}{\sqrt{10}}}\sim t(9)$$

由样本数据，得 $\overline{X}=502, S=6.5, T_0=\frac{502-500}{\frac{6.5}{\sqrt{10}}}=0.97$，查 t 分布表，得 $t_{0.99}(9)=2.82$.

因为 $|T_0|=0.97<2.82$，故可认为自动装罐机工作正常.

例 23　用机床加工圆形零件，在正常情况下，零件的直径服从正态分布 $N(20,1)$（单位：mm），今在某天生产的零件中随机抽查了 6 个，测得直径（单位：mm）分别为

19, 19.2, 19.1, 20.5, 19.6, 20.8

假定方差不变，问该天生产的零件是否符合要求？（即是否可以认为这天生产的零件的平均直径为 20 mm）.（$\alpha=0.05$）

解： ① 由题意可设该天生产的零件直径 $X\sim N(\mu,1)$，则

$$H_0:\mu=20,\quad H_1:\mu\neq 20$$

② 因为 σ^2 已知，所以选取统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\sim N(0,1)$$

当 $\alpha=0.05$ 时，查标准正态分布表得临界值 $u_{0.025}=1.96$，而由样本数据可计算得

$$|U|=\left|\frac{\overline{X}-20}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\right|=0.735<1.96$$

故应接受 H_0，认为该天生产零件的平均直径为 20 mm.

例 24　用包装机包装某种洗衣粉，在正常情况下，每袋质量为 1 000 g，标准差 σ 不能超过 15 g. 假设每袋洗衣粉的净质量服从正态分布. 某天检验机器工作的情况，从已装好的袋中随机抽取 10 袋，测得其净质量（单位：g）为

1 020, 1 030, 968, 994, 1 014, 998, 976, 982, 950, 1 048

问这天机器工作是否正常？（$\alpha=0.95$）

解： ① $H_0:\sigma^2\leqslant 15^2$.

② 选取统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

由样本数据，得 $\overline{X}=998, S=30.23, \chi_0^2=\frac{9\times 30.23^2}{15^2}=36.554\ 0$. 查 χ^2 分布表，得 $\chi^2_{0.95}(9)=16.919$.

因为 $\chi_0^2(9)=36.554>\chi^2_{0.95}(9)=16.919$，故拒绝接受 H_0，即包装机这天工作不正常，应调整.

例 25　从用原来工艺生产的机械零件中抽查 25 个，测量其直径，计算得直径的样本方差为 $s_1^2=6.27$. 从用新工艺生产的机械零件中抽查 25 个，测量其直径，计算得直径的样本方差为 $s_2^2=4.40$. 假设两种工艺条件下生产的零件直径分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，参数均未知，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，试问新工艺生产的零件直径的方差 σ_2^2 是否比原来工艺生产的零件直径的方差 σ_1^2 显著地小？（$F_{0.05}(24,24)=1.98$）

解: 设 X,Y 分别表示原来工艺和新工艺生产零件的直径,且 $N\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,检验假设

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

选取检验统计量为

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(24,24)$$

给定显著性水平 $\alpha=0.05$,要使

$$P\{F\geqslant F_{0.05}(24,24)\}=0.05$$

而 $F_{0.05}(24,24)=1.98$,则拒绝域为$[1.98,+\infty)$.

根据 $s_1^2=6.27$,$s_2^2=4.40$,得检验统计量 F 的观察值为 $F=\frac{6.27}{4.40}=1.425$,所以 F 的观察值不落在拒绝域中,所以接受原假设,不能认为新工艺生产的零件直径的方差比原来工艺生产的零件直径的方差显著地小.

题型 203 有关两类错误的命题

思路启迪: 正确理解两类错误的含义是求解的关键.

(1) 第一类错误: H_0 本来是正确的,由于样本的随机性,样本观察值落入拒绝域而做出了拒绝 H_0 的选择,即 $\alpha=P$(拒绝 $H_0|H_0$ 为真).

(2) 第二类错误: H_0 本来不是正确的,由于样本的随机性,样本观察值落入接受域而做出了接受 H_0 的选择,即 $\beta=P$(接受 $H_0|H_0$ 为假).

例 26 设 X 有概率分布如表 25-8 所列:

表 25-8

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

检验 $H_0:\theta=0.1$,$H_1:\theta=0.9$,抽取 3 个样本取拒绝域 W 为

$$W=\{X_1=1,X_2=1,X_3=1\}$$

求此时犯第一类和第二类错误的概率.

解: 第一类错误为

$$\begin{aligned}\alpha&=P\{\text{拒绝 } H_0\mid H_0 \text{ 为真}\}=P\{X_1=1,X_2=1,X_3=1\mid\theta=0.1\}\\&=\theta^6|_{\theta=0.1}=0.000\,001\end{aligned}$$

第二类错误为

$$\begin{aligned}\beta&=P\{\text{接受 } H_0\mid H_0 \text{ 为假}\}=1-P\{X_1=1,X_2=1,X_3=1\mid\theta=0.9\}\\&=1-\theta^6|_{\theta=0.9}=0.468\,4\end{aligned}$$

例 27 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,4)$的一个样本,其观察值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,平均值为 $\overline{X}$,检验 $H_0:\mu=0$,$H_1:\mu\neq0$. 现取拒绝域

$$W=\left\{x_1,x_2,\cdots,x_n\left|\frac{\sqrt{n}\,|\,\overline{x}\,|}{2}>u_{\frac{\alpha}{2}}\right.\right\}$$

当实际情况为 $\mu=1$ 时，试求犯第二类错误的概率.

解： 犯第二类错误的概率为

$$\beta = P(\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 为假}) = P(\text{样本观测值不属于 } W \mid \mu = 1)$$

当 H_0 不为真时，$\mu=1$，于是 $X\sim N(1,4)$，即 $\overline{X}\sim N\left(1,\frac{4}{n}\right)$.

此外，接受 H_0 时，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W$，即$\frac{\sqrt{n}\,|\overline{x}|}{2}>u_{\frac{\alpha}{2}}$. 从而

$$\beta= P\left(\frac{\sqrt{n}\ |\overline{X}|}{2}\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right)= P\left(|\overline{X}|\leqslant\frac{2u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)= P\left(\frac{-\frac{2u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-1}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\leqslant\frac{\overline{X}-1}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\leqslant\frac{\frac{2u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-1}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{n}}{2}\leqslant\frac{\overline{X}-1}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=\Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(-u_{\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$=\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}-u_{\frac{\alpha}{2}}\right)\right]-\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}+u_{\frac{\alpha}{2}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}+u_{\frac{\alpha}{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}-u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$